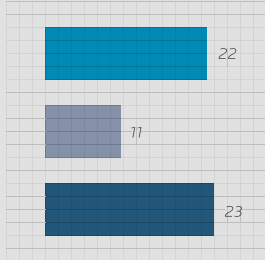
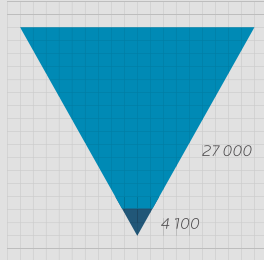


GRAAD 10 WISKUNDE

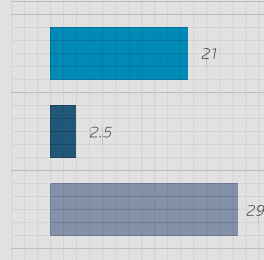
GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS



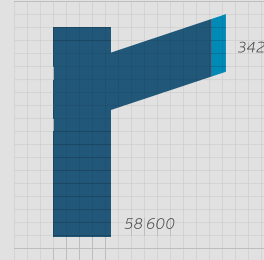
- Algebra oefeninge in hierdie boek
- Trigonometrie oefeninge in hierdie boek
- Meetkunde oefeninge in hierdie boek



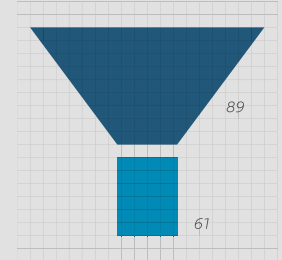
- Liters ink gebruik in al hierdie Graad 10,11 en 12 boeke
- Liters gom gebruik in al hierdie Graad 10,11 en 12 boeke



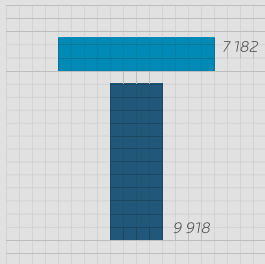
- Breedte van die boek (cm)
- Dikte van die boek (cm)
- Lengte van die boek (cm)



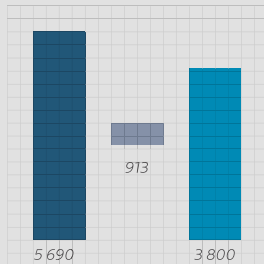
- Hoeveelheid woorde gebruik in hierdie boek
- Hoeveelheid bladsye



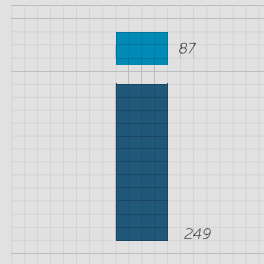
- Hoeveelheid ure spandeer aan onderrig uit hierdie boek
- Hoeveelheid ure spandeer aan huiswerk uit hierdie boek



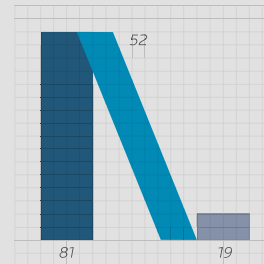
- Lengte van die bladsye (sy aan sy)
- Lengte van die bladsye (kop aan kop)



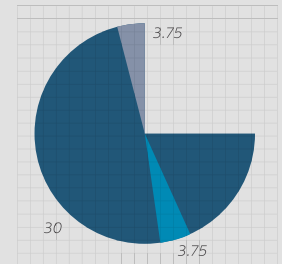
- Aantal kere wat leerders hul kop krap terwyl hul hierdie boek lees
- Aantal kere wat leerders in hul neus krap terwyl hul hierdie boek lees
- Aantal kere wat leerders pen kliek terwyl hul hierdie boek lees



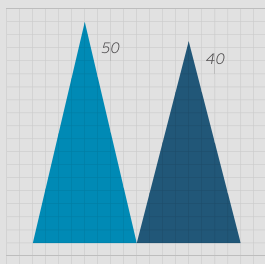
- Hoeveelheid vrouens wat hierdie boek help skryf het
- Hoeveelheid mans wat hierdie boek help skryf het



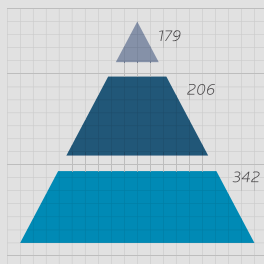
- Meesters-studente wat tot hierdie boek bygedra het
- Honnours-studente wat tot hierdie boek bygedra het
- Voorgraadse studente wat tot hierdie boek bygedra het



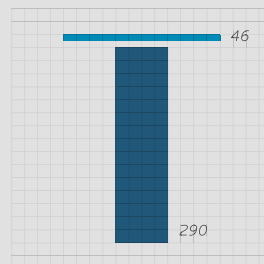
- Ure spandeer om hierdie boek skool toe te neem per week
- Ure spandeer om hierdie boek huis toe te neem per week
- Ure spandeer met hierdie boek in klaskamer per week



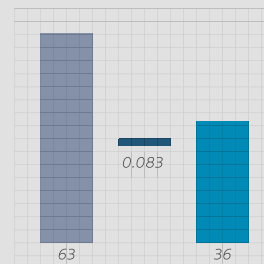
- Gemiddelde grootte van klas wat onderrig word uit hierdie boek
- Gemiddelde ouderdom van onderwyser wat onderrig uit hierdie boek



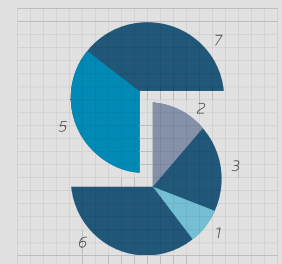
- Aantal teorie bladsye in Graad 12 Wiskunde boek
- Aantal teorie bladsye in Graad 11 Wiskunde boek
- Aantal teorie bladsye in Graad 10 Wiskunde boek



- Aantal Afrikaanse vrijwilligers wat hierdie boek help skryf het
- Aantal Engelse vrijwilligers wat hierdie boek help skryf het



- Aantal ure spandeer om die voorblad te konseptualiseer
- Aantal ure spandeer aan die vervaardiging van hierdie boek
- Aantal ure spandeer om die omslag te ontwerp



- Weeklikse beplanningssessies by UCT wat tot hierdie boek bygedra het
- Dinkskruims in kantoor verband wat tot hierdie boek bygedra het
- Afrikaanse vertalingsessies wat tot hierdie boek bygedra het
- Virtuele werksessies wat tot hierdie boek bygedra het

Everything Maths

Graad 10 Wiskunde

Weergawe 1 – CAPS

deur Siyavula en vrywilligers

Kopiereg kennisgewing

Jou wetlike vryheid om hierdie boek te kopieer

Jy mag enige gedeelte van hierdie boek vrylik kopieer, trouens ons moedig jou aan om dit doen. Jy kan dit soveel keer as jy wil fotostateer, uitdruk of versprei. Jy kan dit op jou selfoon, iPad, rekenaar of geheue stokkie aflaai. Jy kan dit selfs op 'n kompakskyf (CD) brand of dit vir iemand per e-pos aanstuur of op jou eie webblad laai. Die enigste voorbehoud is dat jy die boek, sy omslag en die kortkodes onveranderd laat.

Vir meer inligting oor die Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-ND 3.0) lisensie besoek <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>



Lys van skrywers

Hierdie boek is gegrond op die oorspronklike Free High School Science Text wat in sy geheel deur vrywilligers van die akademici, onderwysers en industrie deskundiges geskryf is. Hulle visie was 'n stel wiskunde en fisiese wetenskappe handboeke, op die kurrikulum gebaseer, wat vrylik aan enige iemand beskikbaar is en onder 'n oop kopiereg lisensie handel.

Siyavula kernspan

Neels van der Westhuizen; Alison Jenkin; Leonard Gumani Mudau; Marina van Zyl; Helen Robertson; Carl Scheffler; Nicola du Toit; Josephine Mamaroke Phatlane; William Buthane Chauke; Thomas Masango

Oorspronklike Free High School Science Texts kernspan

Mark Horner; Samuel Halliday; Sarah Blyth; Rory Adams; Spencer Wheaton

Oorspronklike Free High School Science Texts redaksie

Jaynie Padayachee; Joanne Boulle; Diana Mulcahy; Annette Nell; René Toerien; Donovan Whitfield

Siyavula en Free High School Science Texts bydraers

Sarah Abel; Wiehan Agenbag; Dr. Rory Adams; Andrea Africa; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Jennifer de Beyer; Dr. Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Thinus Booysen; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alex Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Deanne de Bude; Richard Burge; Jan Buys; Bianca Böhmer; George Calder-Potts; Eleanor Cameron; Shane Carolisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Dr. Christine Chung; Brett Cocks; Roché Compaan; Stefaan Conradie; Willem Conradie; Rocco Coppejans; Tim Craib; Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Dr. Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Fernando Durrell; Dr. Dan Dwyer; Frans van Eeden; Alex Ellis; Tom Ellis; Andrew Fisher; Giovanni Franzoni; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr. Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr. Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr. Stephanie Gould; Umeshree Govender; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Carine Grobbelaar; Dr. Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr. Sam Halliday; Asheena Hanuman; Dr. Melanie Dymond Harper; Dr. Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Dr. William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr. Fritha Hennessy; Shaun Hewitson; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr. Benne Holwerda; Dr. Mark Horner; Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Laura Huss; Hester Jacobs; Stefan Jacobs; Prof. Ed Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Clare Johnson; Luke Jordan; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr. Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Herman Kamper; Dr. Lutz Kampmann; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Nothando Khumalo; Paul Kim; Dr. Jennifer Klay; Grove Koch; Dr. Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Dr. Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr. Marco van Leeuwen; Dr. Tom Leinster; Henry Liu; Christopher Loetscher; Linda Loots; Mike Loseby; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr. Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr. Komal Maheshwari; Michael Malahe; Masoabi Malunga; Kosma von Maltitz; Masilo

Mapaila; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret; John Mathew; Dr. Will Matthews; Chiedza Matuso; JoEllen McBride; Nikolai Meures; Riana Meyer; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Melissa Munnik; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Tyrone Negus; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Towan Nothling; Dr. Markus Oldenburg; Thomas O'Donnell; Dr. Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Masimba Paradza; Dave Pawson; Justin Pead; Nicolette Pekeur; Carli Pengilly; Joan Pienaar; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Jaco du Plessis; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Prof. Sergey Rakityansky; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr. Matina J. Rassias; Dr. Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Dr. Matthew Reece; Chris Reeders; Razvan Remsing; Laura Richter; Dr. Max Richter; Sean Riddle; Dr. David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr. Andrew Rose; Katie Ross; Jeanne-Marié Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Christo van Schalkwyk; Rhoda van Schalkwyk; Dr. Carl Scheffler; Cho Hee Shrader; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Helen Seals; Relebohile Sefako; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Dr. James Short; Roger Sieloff; Brandon Sim; Bonga Skozana; Clare Slotow; Bradley Smith; Greg Solomon; Nicholas Spaul; Hester Spies; Dr. Andrew Stacey; Dr. Jim Stasheff; Mike Stay; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Masixole Swartbooi; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Mfundo Vezzi; Mpilohle Vilakazi; Alexander Volkwyn; Mia de Vos; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr. Dawn Webber; Michelle Wen; Francois Wessels; Wessel Wessels; Neels van der Westhuizen; Dr. Alexander Wetzler; Dr. Spencer Wheaton; Vivian White; Dr. Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr. Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

Everything Maths

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld – of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net 'n paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvindings kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonomie gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral – in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

Kyk na die video inleiding van Dr. Mark Horner:  VMIwd by www.everythingmaths.co.za

Meer as net 'n handboek



Everything's Maths is nie net 'n Wiskunde handboek nie. Daar is meer in as net die gewone inhoud wat jy van 'n skoolhandboek verwag. Om mee te begin kan jy die boek aflaai of aanlyn lees op jou selfoon, rekenaar of iPad. Dit is daarom gerieflik beskikbaar waar ook al jy is.

Ons weet dat dit partykeer moeilik is om iets in woorde te verduidelik, daarom is daar lesse en verduidelikings in video-formaat by elke hoofstuk sodat die idees en konsepte vir jou realiteit kan word. Die aanbieding aan die einde van elke hoofstuk bied 'n oorsig oor al die inhoud wat jy geleer het, en die kern konsepte is vir jou uitgelig sodat jy die maklik kan hersien.

Al die oefeninge in die boek het 'n skakel na 'n diens wat vir jou nog oefeninge gee, die oplossings gee of jou toelaat om jou vaardigheid te toets – op 'n selfoon of 'n rekenaar.

Ons wil weet wat jy dink, waarom jy wonder, en waarmee jy sukkel terwyl jy deur die boek werk en die oefeninge probeer doen. Ons het dit daarom moontlik gemaak dat jy jou werk, met jou selfoon of rekenaar, digitaal "aansteek" op 'n bladsy en dan ook te kan sien watter vrae en antwoorde ander lesers "aangesteek" het.

Everything Maths op jou selfoon of rekenaar

Jy het altyd toegang tot die handboek, of jy by die huis, die skool of op 'n trein is. Blaai deur na die aanlyn weergawe van Everything Maths op jou selfoon, "tablet" of rekenaar. As jy dit wil lees terwyl jy van lyn af is, kan jy dit as 'n PDF-leër of in e-boek formaat aflaai.

Om die boek te lees of af te laai, besoek www.everythingmaths.co.za op jou selfoon of rekenaar.



Hoe om die ikons en kortkodes te gebruik

Die ikons in die boek help jou om te sien waar videos, aanbiedinge, oefeninge en ander hulp voorkom. Die kortkodes langs die ikons laat jou toe om direk na die aanlyn-bron te blaai sonder om daarvoor te soek.

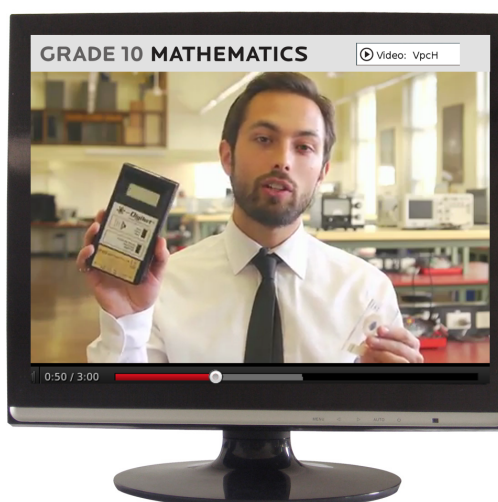
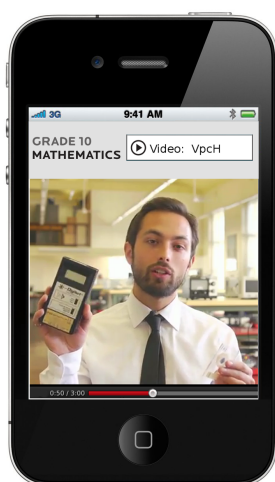
-  (A123) Gaan direk na 'n afdeling
-  (V123) Video, simulاسie of aanbieding
-  (P123) Oefen en toets jou vaardighede
-  (Q123) Vra vir hulp of vind 'n antwoord

Om die videos aanlyn te sien, oefeninge te doen of 'n vraag op te sit, gaan na die Everything Maths webblad by www.everythingsmaths.co.za van jou selfoon of rekenaar en voer die kortkode in die soek-blokkie in.

Video-lesse

Soek die video ikons in die boek. Hierdie ikons neem jou na video-lesse wat sal help om die idees en konsepte vir jou lewendig te maak. Jy kan ekstra insigte, volledige verduidelikings en uitgewerkte voorbeelde hier sien. Die konsep word prakties voorgestel en jy kan luister hoe regte mense wiskunde en wetenskap in hul werk gebruik.

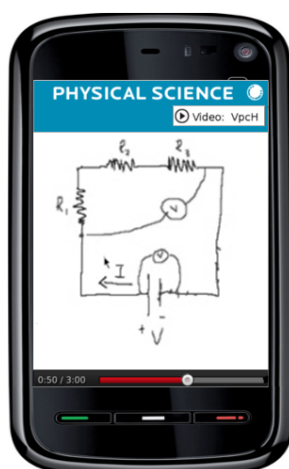
Sien video verduideliking  (Video: V123)



Video oplossings

As daar oefeninge in die boek is, sal jy die ikons en kortkodes vir video-oplossings, oefeninge en hulp sien. Hierdie kortkodes vat jou na die video-oplossings van sommige oefeninge sodat jy stap-vir-stap kan sien hoe om die probleem op te los.

Sien video oefening  (Video: V123)



Jy kan toegang tot die videos kry deur:

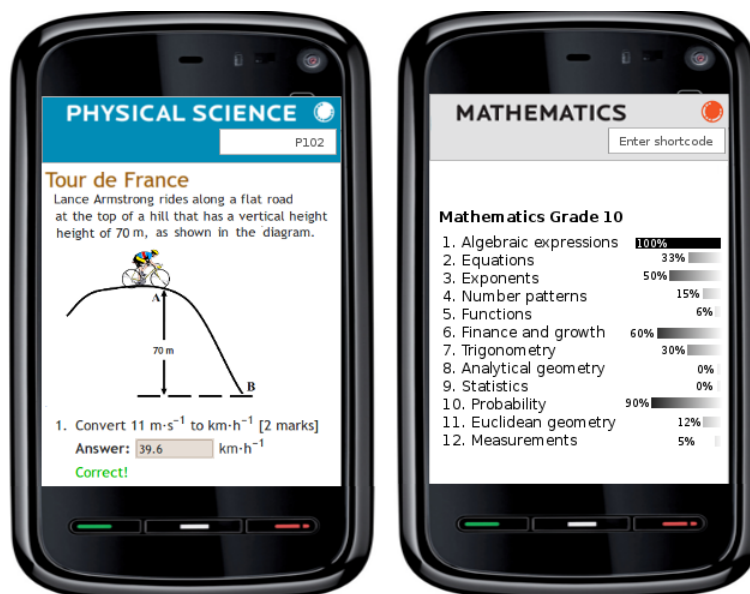
- hulle aanlyn op jou selfoon of rekenaar te kyk
- die videos af te laai sodat jy die van lyn af op jou selfoon of rekenaar kan kyk.
- 'n DVD te bestel wat jy op jou TV of rekenaar kan speel.
- dit van lyn af af te laai met Bluetooth of Wi-Fi van sekere afsetpunte

Om nog videos te sien, of vir meer inligting, besoek die Everything Maths webblad vanaf jou selfoon of rekenaar by www.everythingmaths.co.za

Oefen en toets jou vaardigheid

Een van die beste maniere om vir toetse of eksamens voor te berei, is om te oefen om dieselfde soort vrae te antwoord as waarmee jy getoets gaan word. By elke stel oefeninge is daar 'n oefen ikon en 'n kortkode. Hierdie aanlyn-oefeninge, wat jy van jou selfoon of rekenaar af kan laai, hou rekord van jou prestasie en vordering, gee vir jou terugvoer oor watter areas jy mee sukkel en maak voorstelle oor na watter afdelings of videos jy moet gaan kyk.

Sien meer oefeninge **A⁺** (QM123)



Om te oefen en jou vaardigheid te toets:

Gaan na www.everythingmaths.co.za op jou selfoon of rekenaar en voer die kortkode in.

Antwoord op jou vraag

Het jy al ooit 'n vraag oor 'n spesifieke feit, formule of 'n oefening in jou handboek gehad en gewens dat jy net iemand kon vra? Sekerlik moes iemand anders in die land al dieselfde vraag op dieselfde plek in die handboek gehad het.



Versameling van vrae en antwoorde

Ons nooi jou uit om deur ons versameling van vorige vrae en antwoorde te blaai met jou spesifieke vraag. Elke afdelings en oefening in die boek het sy eie lys van vorige vrae en antwoorde. Jy kan die kort kode vir 'n afdeling of vraag gebruik om vrae spesifiek tot daardie afdeling of oefening te vind. Besoek die webtuiste of mobi-site by www.everythingmaths.co.za of www.everythingscience.co.za en sleutel die kort kode in die soekvorm in.



(A123) Besoek hierdie afdeling om vrae te kyk of te pos



(Q123) Vrae of help met 'n spesifieke vraag

Vra 'n kenner

Sukkel jy om jou vraag of die antwoord daarop in ons versameling van vrae te vind? Dan is jy welkom om ons antwoorddiens uit te probeer. Jy kan die kort kode vir die afdeling of oefening gebruik om jou vraag na 'n kenner te stuur wat dit sal beantwoord. Besoek die webtuiste of mobi-site by www.everythingmaths.co.za of www.everythingscience.co.za en sleutel die kort kode in die soekvorm in.

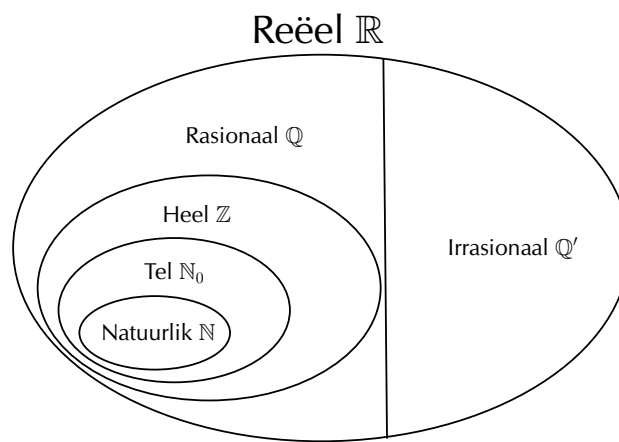
Inhoud

1	Algebraïese uitdrukkings	1
1.1	Die reële getalsisteem	1
1.2	Rasionale en irrasionale getalle	2
1.3	Afronding	9
1.4	Benadering van wortelgetalle	11
1.5	Produkte	14
1.6	Faktorisering	18
1.7	Vereenvoudiging van breuke	32
2	Vergelykings en ongelykhede	42
2.1	Oplos van lineêre vergelykings	42
2.2	Oplos van kwadratiese vergelykings	48
2.3	Oplossing van gelyktydige vergelykings	51
2.4	Woordprobleme	61
2.5	Lettervergelykings	68
2.6	Lineêre ongelykhede	71
3	Eksponensiale	80
3.1	Eksponentwette	80
3.2	Rasionale eksponente	86
3.3	Eksponentvergelykings	88
4	Getalpatrone	95
4.1	Beskryf reekse	97
4.2	Patrone en bewerings	101
5	Funksies	107
5.1	Funksies in die regte wêreld	107
5.2	Lineêre funksies	112
5.3	Paraboliese funksies	122
5.4	Hiperboliese funksies	134
5.5	Eksponensiële funksies	145
5.6	Trigonometriese funksies	158

5.7	Interpretasie van grafieke	177
6	Finansies en groei	191
6.1	Geldstories	191
6.2	Enkelvoudige rente	191
6.3	Saamgestelde rente	198
7	Trigonometrie	217
7.1	Trigonometrie is bruikbaar	217
7.2	Gelykvormigheid van driehoeke	217
7.3	Definisie van die trigonometriese verhoudings	219
7.4	Omgekeerde funksies	220
7.5	Spesiale hoeke	225
7.6	Oplos van trigonometriese vergelykings	226
7.7	Berekening van 'n hoek	229
7.8	Twee-dimensionele probleme	231
7.9	Definisie van verhoudings in die Cartesiese vlak	239
8	Analitiese meetkunde	249
8.1	Figures op die Cartesiese vlak	249
8.2	Afstand tussen twee punte	250
8.3	Berekening van gradiënt	255
8.4	Middelpunt van 'n lynstuk	270
9	Statistiek	282
9.1	Versamelling van data	282
9.2	Maatstawwe van sentrale neiging	286
9.3	Groepering van data	296
9.4	Spreading	301
9.5	Vyf-getal opsomming	312
10	Waarskynlikheid	320
10.1	Teoretiese waarskynlikheid	324
10.2	Relatiewe frekwensie	326
10.3	Venn-diagramme	330
10.4	Vereniging en deursnit	334
10.5	Waarskynlikheids-identiteite	335
10.6	Onderling uitsluitende gebeurtenisse	338
10.7	Komplementêre gebeurtenisse	340
11	Euklidiese meetkunde	349
11.1	Vierhoeke	365

11.2 Die middelpuntstelling	379
12 Meting	394
12.1 Oppervlaktes van veelhoeke	394
12.2 Regte prisma's en silinders	397
12.3 Regte piramides, regte keëls en sfeer	411
12.4 Vermenigvuldiging van 'n afmeting met 'n faktor k	430
13 Oefening oplossings	440

1.1 Die reële getalsisteem



Ons gebruik die volgende definisies:

- $\mathbb{N}$: natuurlike getalle is $\{1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{N}_0$: telgetalle is $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{Z}$: heelgetalle is $\{\dots - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

📺 Video: VMabo by www.everythingmaths.co.za

1.2 Rasionale en irrasionale getalle



DEFINISIE: Rasionale getal

'n Rasionale getal is enige getal wat geskryf kan word as:

$$\frac{a}{b}$$

waar a en b heelgetale is en $b \neq 0$.

Die volgende getalle is almal rasionaal.

$$\frac{10}{1}, \frac{21}{7}, \frac{-1}{-3}, \frac{10}{20}, \frac{-3}{6}$$

Ons sien dat al die tellers en noemers heelgetalle is. Dit beteken dat alle heelgetalle rasionaal is, aangesien hulle geskryf kan word met 'n noemer van 1.

DEFINISIE: Irrasionale getalle

Irrasionale getalle ($\mathbb{Q}'$) is getalle wat nie as 'n breuk met 'n heeltallige teller en noemer geskryf kan word nie. Dit beteken dat enige getal wat nóg 'n eindige nóg 'n herhalende desimale getal is, irrasionaal is.

Voorbeelde van irrasionale getalle is:

$$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt[3]{4}; \pi; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Hierdie is nie rasionale getalle nie, want óf die teller óf die noemer is nie heeltallig nie.

Desimale getalle



Alle heelgetalle en heeltallige kwosiënte is rasionaal. Daar is twee bykomende vorme van rasionale getalle.

Jy kan 'n rasionale getal as 'n desimale getal skryf. Twee tipes desimale getalle wat as rasionale getalle geskryf kan word:

- Desimale getalle waarvan die nie-nul getalle na die komma tot 'n einde kom of termineer, byvoorbeeld die breuk $\frac{4}{10}$ kan geskryf word as 0,4.
- Desimale getalle wat 'n nimmereindigende herhalende patroon van getalle na die komma het, byvoorbeeld die breuk $\frac{1}{3}$ kan geskryf word as $0,\dot{3}$. Die kolletjie beteken dat die 3'e repeteer, m.a.w. $0,333\dots = 0,\dot{3}$.
- Desimale getalle wat 'n herhalende patroon van meer as een syfer het, byvoorbeeld die breuk $\frac{2}{11}$ kan geskryf word as $0,\overline{18}$. Die staaf stel 'n herhalende patroon van 1 en 8 voor, m.a.w. $0,\overline{18} = 0,181818\dots$

Notasie: Jy kan 'n kolletjie of 'n staaf bo die herhalende getalle gebruik om aan te dui dat die desimaal herhalend is. As die staaf bo meer as een getal is, beteken dit dat al die getalle onder die staaf herhalend is.

As jy gevra word om uit te werk of 'n getal rasionaal of irrasionaal is, skryf eers die getal in desimaalnotasie. As die desimaal eindig, is die getal rasionaal. As dit vir ewig aanhou, soek vir 'n herhalende syferpatroon. As daar geen patroon is nie, is die getal irrasionaal.

As jy 'n irrasionale getal in desimaalnotasie skryf, kan jy aanhou skryf vir baie, baie syfers. Dit is egter ongerieflik en 'n mens rond gewoonlik af.

Voorbeeld 1: Rasionale en irrationale getalle**PROBLEEM**

Watter van die volgende getalle is nie rasionaal nie?

1. $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$
2. 1,4
3. 1,618033989...
4. 100
5. 1,7373737373...
6. $0,\overline{02}$

OPLOSSING

1. Irrasionaal, desimaal termineer nie en het nie 'n herhalende patroon nie.
2. Rasionaal, desimaal termineer.
3. Irrasionaal, desimaal termineer nie en het nie 'n herhalende patroon nie.
4. Rasionaal, alle heelgetalle is rasionaal.
5. Rasionaal, desimaal het 'n herhalende patroon.
6. Rasionaal, desimaal het 'n herhalende patroon.

Omskakeling tussen eindigende desimale getalle en rasionale getalle EMDD

'n Desimale getal het 'n heeltallige deel en 'n breukdeel. Byvoorbeeld, 10,589 het 'n heeltallige deel van 10 en 'n breukdeel van 0,589 omdat $10 + 0,589 = 10,589$. Die breukdeel kan geskryf word as 'n rasionale getal, m.a.w. met 'n teller en 'n noemer wat heelgetalle is.

Elke syfer na die desimale komma is 'n breuk met 'n noemer wat 'n vermeerderende mag van 10 is. Byvoorbeeld:

- 0,1 is $\frac{1}{10}$
- 0,01 is $\frac{1}{100}$
- 0,001 is $\frac{1}{1000}$

Dit beteken dat:

$$\begin{aligned} 10,589 &= 10 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1\,000} \\ &= \frac{10\,000}{1\,000} + \frac{500}{1\,000} + \frac{80}{1\,000} + \frac{9}{1\,000} \\ &= \frac{10\,589}{1\,000} \end{aligned}$$

Omskakeling van repeterende desimale na rasionale getalle EMDE

Wanneer die desimaal repeterend is, is daar 'n bietjie meer werk nodig om die breukdeel van die desimale getal as 'n breuk te skryf.

Voorbeeld 2: Omskakeling van desimale getalle na breuke**PROBLEEM**

Skryf $0,\dot{3}$ in die vorm $\frac{a}{b}$ waar a en b heelgetalle is.

OPLOSSING

Stap 1 : **Stel 'n vergelyking op**

Laat $x = 0,33333 \dots$

Stap 2 : **Vermenigvuldig met 10 aan beide kante**

$$10x = 3,33333 \dots$$

Stap 3 : **Trek die tweede vergelyking van die eerste vergelyking af**

$$9x = 3$$

Stap 4 : **Vereenvoudig**

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Voorbeeld 3: Omskakeling van desimale getalle na breuke**PROBLEEM**

Skryf $5,4\overline{32}$ as 'n rasionale breuk.

OPLOSSING

Stap 1 : **Stel 'n vergelyking op**

$$x = 5,432432432 \dots$$

Stap 2 : **Vermenigvuldig met 1000 aan beide kante**

$$1\,000x = 5\,432,432432432 \dots$$

Stap 3 : **Trek die tweede vergelyking van die eerste vergelyking af**

$$999x = 5\,427$$

Stap 4 : **Vereenvoudig**

$$x = \frac{5\,427}{999} = \frac{201}{37} = 5\frac{16}{37}$$

In die eerste voorbeeld is die desimaal met 10 vermenigvuldig en in die tweede voorbeeld is dit met 1000 vermenigvuldig. Dit is omdat daar in die eerste voorbeeld slegs een repeterende syfer (nl. 3) was, terwyl die tweede voorbeeld drie repeterende syfers (nl. 432) gehad het.

In die algemeen, as jy een repeterende syfer het, vermenigvuldig jy met 10. As jy twee repeterende syfers het, vermenigvuldig jy met 100. Met drie syfers vermenigvuldig jy met 1000 en so aan.

Nie alle desimale getalle kan as rasionale getalle geskryf word nie. Hoekom nie? Irrasionale desimale getalle soos $\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$ kan nie geskryf word met 'n heeltallige teller en noemer nie, omdat daar geen patroon van repeterende syfers is nie. Jy behoort egter, so ver moontlik, eerder rasionale getalle of breuke as desimale getalle te gebruik.

Oefening 1 - 1

1. Sê of die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is. As die getal rasionaal is, sê of dit 'n natuurlike getal, telgetal of heelgetal is:

(a) $-\frac{1}{3}$

(b) $0,651268962154862 \dots$

(c) $\frac{\sqrt{9}}{3}$

(d) π^2

2. As a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c irrasionaal is, watter van die volgende is rasionale getalle?

a. $\frac{5}{6}$

b. $\frac{a}{3}$

c. $\frac{-2}{b}$

d. $\frac{1}{c}$

3. Vir watter van die volgende waardes van a is $\frac{a}{14}$ rasionaal of irrasionaal?

a. 1

b. -10

c. $\sqrt{2}$

d. $2,1$

4. Skryf die volgende as breuke:

a. $0,1$

b. $0,12$

c. $0,58$

d. $0,2589$

5. Skryf die volgende in repeterende (herhalende) desimale notasie:

a. $0,11111111 \dots$

- b. $0,1212121212\dots$
- c. $0,123123123123\dots$
- d. $0,11414541454145\dots$

6. Skryf die volgende in repeterende (herhalende) desimale notasie:

- a. $\frac{2}{3}$
- b. $1\frac{3}{11}$
- c. $4\frac{5}{6}$
- d. $2\frac{1}{9}$

7. Skryf die volgende in breukvorm:

- a. $0,\dot{5}$
- b. $0,6\dot{3}$
- c. $5,\overline{31}$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

- (1.) 02ee (2.) 02ef (3.) 02eg (4.) 02eh (5.) 02ei (6.) 02ej
(7.) 02ek

1.3 Afronding



Afronding van 'n desimale getal tot 'n sekere aantal desimale plekke is 'n eenvoudige manier om die benaderde waarde van 'n desimale getal te vind. As jy byvoorbeeld $2,6525272$ tot drie desimale plekke wil afrond:

- tel drie plekke na die desimale komma en plaas 'n | tussen die derde en vierde syfers
- rond die derde syfer na bo af as die vierde syfer groter as of gelyk aan 5 is
- los die derde syfer onveranderend as die derde syfer kleiner as 5 is
- as die derde syfer 9 is en afgerond moet word, dan raak die 9 'n 0 en die tweede syfer sal boontoe afgerond moet word

Dus, aangesien die eerste syfer na die | 'n 5 is, moet ons na bo afrond en die derde desimaal na die komma word 3. Die antwoord vir 2,6525272 afgerond na drie desimale plekke is dus 2,653.

Voorbeeld 4: Afronding

PROBLEEM

Rond die volgende getalle af:

1. $\frac{120}{99} = 1,21212121\dot{2}$ tot 3 desimale plekke
2. $\pi = 3,141592654\dots$ tot 4 desimale plekke
3. $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ tot 4 desimale plekke
4. 2,78974526... tot 3 desimale plekke

OPLOSSING

Stap 1 : **Merk die gevraagde aantal desimale plekke af**

1. $\frac{120}{99} = 1,212|12121\dot{2}$
2. $\pi = 3,1415|92654\dots$
3. $\sqrt{3} = 1,7320|508\dots$
4. 2,789|74526...

Stap 2 : **Kyk na die volgende syfer om te sien of jy boontoe of ondertoe moet afrond**

1. Die laaste syfer van $\frac{120}{99} = 1,212|12121\dot{2}$ moet na onder afgerond word.
2. Die laaste syfer van $\pi = 3,1415|92654\dots$ moet na bo afgerond word.
3. Die laaste syfer van $\sqrt{3} = 1,7320|508\dots$ moet na bo afgerond word.
4. Die laaste syfer van 2,789|74526... moet na bo afgerond word.

Aangesien dit 'n 9 is, vervang ons dit met 0 en rond die tweede laaste syfer boontoe af.

Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

1. $\frac{120}{99} = 1,212$ afgerond tot 3 desimale plekke
2. $\pi = 3,1416$ afgerond tot 4 desimale plekke
3. $\sqrt{3} = 1,7321$ afgerond tot 4 desimale plekke
4. 2,790 afgerond tot 3 desimale plekke

Oefening 1 - 2

Skryf die volgende getalle tot 3 desimale plekke:

1. 12,56637061...
2. 3,31662479...
3. 0,26666666...
4. 1,912931183...
5. 6,32455532...
6. 0,05555555...

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.-6.) 02em

1.4 Benadering van wortelgetalle



Indien die n^{de} magswortel van 'n getal nie as 'n rasionale getal geskryf kan word nie, noem ons dit 'n wortelgetal. Byvoorbeeld, $\sqrt{2}$ en $\sqrt[3]{6}$ is wortelgetalle, maar $\sqrt{4}$ is nie 'n wortelgetal nie, aangesien ons dit kan vereenvoudig tot die rasionale getal 2.

In hierdie hoofstuk gaan ons slegs wortelgetalle van die vorm $\sqrt[n]{a}$, ondersoek, waar a 'n positiewe heelgetal is, byvoorbeeld $\sqrt{7}$ or $\sqrt[3]{5}$. Dit kom algemeen voor dat $n = 2$, daarom skryf ons $\sqrt{a}$ in plaas van $\sqrt[2]{a}$.

Dit is soms nuttig om 'n wortelgetal te benader sonder om 'n sakrekenaar te gebruik. Ons wil byvoorbeeld kan benader waar $\sqrt{3}$ op die getallelyn lê. Met 'n sakrekenaar kan ons bereken $\sqrt{3}$ is gelyk aan $1,73205 \dots$. Dit is maklik om te sien dat $\sqrt{3}$ tussen 1 en 2 lê. Om sonder 'n sakrekenaar te bepaal waar ander wortelgetalle, soos $\sqrt{18}$, op die getallelyn lê, moet jy eers die volgende verstaan:

As a en b positiewe getalle is met $a < b$, dan $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

'n Volkome vierkant is die getal wat verkry word wanneer 'n heelgetal met homself vermenigvuldig word. Byvoorbeeld, 9 is 'n volkome vierkant aangesien $3^2 = 9$.

Soortgelyk is 'n volkome derdemag die getal wat verkry word wanneer 'n heelgetal tot die derde mag verhef word. Byvoorbeeld, 27 is 'n volkome derdemag aangesien $3^3 = 27$.

Gegee die wortelgetal $\sqrt[3]{52}$, behoort jy te kan sien dat dit iewers tussen 3 en 4 op die getallelyn lê, aangesien $\sqrt[3]{27} = 3$ en $\sqrt[3]{64} = 4$ en 52 tussen 27 en 64 lê.

Voorbeeld 5: Benadering van wortelgetalle

PROBLEEM

Vind die opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt{26}$ lê. Onthou dat opeenvolgende heelgetalle met 1 verskil, byvoorbeeld 5 en 6 of 8 en 9.

OPLOSSING

Stap 1 : Gebruik die volkome vierkant om die laer heelgetal te skat

$$5^2 = 25. \text{ Daarom } 5 < \sqrt{26}.$$

Stap 2 : Gebruik die volkome vierkant om die hoër heelgetal te skat

$$6^2 = 36. \text{ Daarom } \sqrt{26} < 6.$$

Stap 3 : Die finale antwoord is

$$5 < \sqrt{26} < 6.$$

Voorbeeld 6: Benadering van wortelgetalle**PROBLEEM**

Vind die opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt[3]{49}$ lê.

OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik volkome derdemagte om die laer heelgetal te skat**

$$3^3 = 27, \text{ daarom } 3 < \sqrt[3]{49}.$$

Stap 2 : **Gebruik volkome derdemagte om die hoër heelgetal te skat**

$$4^3 = 64, \text{ daarom } \sqrt[3]{49} < 4.$$

Stap 3 : **Die antwoord is**

$$3 < \sqrt[3]{49} < 4.$$

Stap 4 : **Kontroleer die antwoord deur al die getalle in die ongelykheid tot die derde mag te verhef en vereenvoudig**

$$27 < 49 < 64, \text{ wat waar is. Dus lê } \sqrt[3]{49} \text{ tussen 3 en 4.}$$

Oefening 1 - 3

Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van die getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $\sqrt{18}$

2. $\sqrt{29}$

3. $\sqrt[3]{5}$

4. $\sqrt[3]{79}$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.-4.) 02et

1.5 Produkte



Wiskundige uitdrukkings is soos sinne en elke deel het 'n spesifieke naam. Jy behoort vertrouwd te wees met die volgende name wat die dele van wiskundige uitdrukkings beskryf.

$$3x^2 + 7xy - 5^3 = 0$$

Naam	Voorbeelde
terme	$3x^2$; $7xy$; -5^3
uitdrukking	$3x^2 + 7xy - 5^3$
koëffisiënt	3; 7
eksponent	2; 1; 3
basis	x ; y ; 5
konstante	3; 7; 5
veranderlike	x ; y
vergelyking	$3x^2 + 7xy - 5^3 = 0$

Vermenigvuldig 'n eenterm en 'n tweeterm



'n Eenterm is 'n wiskundige uitdrukking met een term, byvoorbeeld $3x$ of y^2 . 'n Binaomiaal of tweeterm is 'n wiskundige uitdrukking met twee terme, soos $ax + b$ of $cx + d$.

Voorbeeld 7: Vereenvoudiging van hakies**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $2a(a - 1) - 3(a^2 - 1)$.

OPLOSSING

$$\begin{aligned} 2a(a - 1) - 3(a^2 - 1) &= 2a(a) + 2a(-1) + (-3)(a^2) + (-3)(-1) \\ &= 2a^2 - 2a - 3a^2 + 3 \\ &= -a^2 - 2a + 3 \end{aligned}$$

Produk van twee binomiale

Hieronder vermenigvuldig ons twee lineêre binomiale:

$$(ax + b)(cx + d)$$

$$\begin{aligned} (ax + b)(cx + d) &= (ax)(cx) + (ax)d + b(cx) + bd \\ &= acx^2 + adx + bcx + bd \\ &= acx^2 + x(ad + bc) + bd \end{aligned}$$

Voorbeeld 8: *Produk van twee binomiale***PROBLEEM**

Vind die produk: $(3x - 2)(5x + 8)$.

OPLOSSING

$$\begin{aligned}
 (3x - 2)(5x + 8) &= (3x)(5x) + (3x)(8) + (-2)(5x) + (-2)(8) \\
 &= 15x^2 + 24x - 10x - 16 \\
 &= 15x^2 + 14x - 16
 \end{aligned}$$

Die produk van twee identiese binomiale is bekend as die kwadraat (of vierkant) van binomiale en word geskryf as:

$$(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

Gestel die twee terme is $ax + b$ en $ax - b$ dan is hulle produk:

$$(ax + b)(ax - b) = a^2x^2 - b^2$$

Dit staan bekend as die verskil van twee kwadrate (of vierkante).

Vermenigvuldig 'n tweeterm en 'n drieterm

'n Trinomiaal of drieterm is 'n uitdrukking met drie terme, byvoorbeeld $ax^2 + bx + c$. In hierdie gedeelte gaan ons leer hoe om 'n binomiaal, of tweeterm, met 'n trinomiaal, of drieterm, te vermenigvuldig.

Om die produk van 'n binomiaal en 'n trinomiaal te bereken, vermenigvuldig die terme in hakies:

$$(A + B)(C + D + E) = A(C + D + E) + B(C + D + E)$$

▶ Video: MG10062 by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 9: Vermenigvuldiging van binomiaal met trinomiaal**PROBLEEM**

Vind die produk: $(x - 1)(x^2 - 2x + 1)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Pas die distributiewe wet toe**

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 - 2x + 1) &= x(x^2 - 2x + 1) - 1(x^2 - 2x + 1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

Stap 2 : **Vereenvoudig**

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Oefening 1 - 4

Vind die produkte:

1. $2y(y + 4)$

2. $(y + 5)(y + 2)$

3. $(2 - t)(1 - 2t)$

4. $(x - 4)(x + 4)$

5. $(2p + 9)(3p + 1)$

6. $(3k - 2)(k + 6)$

7. $(s + 6)^2$

8. $-(7 - x)(7 + x)$

9. $(3x - 1)(3x + 1)$

10. $(7k + 2)(3 - 2k)$

11. $(1 - 4x)^2$

12. $(-3 - y)(5 - y)$

13. $(8 - x)(8 + x)$

14. $(9 + x)^2$

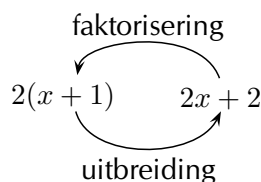
15. $(-2y^2 - 4y + 11)(5y - 12)$ 20. $(2y^6 + 3y^5)(-5y - 12)$
 16. $(7y^2 - 6y - 8)(-2y + 2)$ 21. $(-7y + 11)(-12y + 3)$
 17. $(10y + 3)(-2y^2 - 11y + 2)$ 22. $(7y + 3)(7y^2 + 3y + 10)$
 18. $(-12y - 3)(12y^2 - 11y + 3)$ 23. $9(8y^2 - 2y + 3)$
 19. $(-10)(2y^2 + 8y + 3)$ 24. $(-6y^4 + 11y^2 + 3y)(10y + 4)(4y - 4)$

(A⁺) Meer oefening (▶) video oplossings (?) of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.-6.) 02ex (7.-12.) 02ey (13.-18.) 02ez (19.-24.) 02f0

1.6 Faktorisering



Faktorisering is die omgekeerde proses van uitbreiding of die verwydering van hakies. Byvoorbeeld, as hakies uitgebrei word, word $2(x + 1)$ geskryf as $2x + 2$. Faktorisering sal dus begin met $2x + 2$ en eindig met $2(x + 1)$.



Die twee uitdrukkings $2(x + 1)$ en $2x + 2$ is ekwivalent; hulle het dieselfde waarde vir alle waardes van x .

In vorige grade het ons gefaktoreer deur die uithaal van gemeenskaplike faktore en die verskil tussen twee vierkante.

▶ Video: VMabz by www.everythingmaths.co.za

Gemeenskaplike faktore



Faktorisering deur die uithaal van gemeenskaplike faktore is gebaseer daarop dat daar faktore is wat in al die terme voorkom.

Byvoorbeeld, $2x - 6x^2$ kan as volg gefaktoriseer word:

$$2x - 6x^2 = 2x(1 - 3x)$$

Voorbeeld 10: Faktorisering wat die omruiling van getalle in hakies benodig

PROBLEEM

Faktoriseer: $5(a - 2) - b(2 - a)$.

OPLOSSING

Gebruik 'n omruilingstegniek om die gemene faktor te vind:
let op dat $2 - a = -(a - 2)$.

$$\begin{aligned} 5(a - 2) - b(2 - a) &= 5(a - 2) - [-b(a - 2)] \\ &= 5(a - 2) + b(a - 2) \\ &= (a - 2)(5 + b) \end{aligned}$$

Verskil van twee vierkante



Ons het gesien dat:

$$(ax + b)(ax - b) \text{ kan uit gebrei word as } a^2x^2 - b^2$$

Dus

$$\text{kan } a^2x^2 - b^2 \text{ gefaktoriseer word as } (ax + b)(ax - b)$$

Byvoorbeeld, $x^2 - 16$ kan geskryf word as $(x^2 - 4^2)$ wat die verskil is tussen twee kwadrate.

Dus, die faktore van $x^2 - 16$ is $(x - 4)$ en $(x + 4)$. Om te faktoriseer, kyk vir uitdrukkings:

- wat uit twee terme bestaan
- met terme met verskillende tekens (een positief, een negatief)
- met elke term 'n volkome vierkant

Byvoorbeeld: $a^2 - 1$; $4x^2 - y^2$; $-49 + p^4$

Voorbeeld 11: Faktorisering van die verskil tussen twee vierkante

PROBLEEM

Faktoriseer: $3a(a^2 - 4) - 7(a^2 - 4)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Haal uit die gemene faktor** $(a^2 - 4)$

$$3a(a^2 - 4) - 7(a^2 - 4) = (a^2 - 4)(3a - 7)$$

Stap 2 : **Faktoriseer die verskil van twee kwadrate** $(a^2 - 4)$

$$(a^2 - 4)(3a - 7) = (a - 2)(a + 2)(3a - 7)$$

Oefening 1 - 5

Faktoriseer:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1. $2l + 2w$ | 13. $-2ab - 8a$ |
| 2. $12x + 32y$ | 14. $24kj - 16k^2j$ |
| 3. $6x^2 + 2x + 10x^3$ | 15. $-a^2b - b^2a$ |
| 4. $2xy^2 + xy^2z + 3xy$ | 16. $12k^2j + 24k^2j^2$ |
| 5. $-2ab^2 - 4a^2b$ | 17. $72b^2q - 18b^3q^2$ |
| 6. $7a + 4$ | 18. $4(y - 3) + k(3 - y)$ |
| 7. $20a - 10$ | 19. $a^2(a - 1) - 25(a - 1)$ |
| 8. $18ab - 3bc$ | 20. $bm(b + 4) - 6m(b + 4)$ |
| 9. $12kj + 18kq$ | 21. $a^2(a + 7) + 9(a + 7)$ |
| 10. $16k^2 - 4$ | 22. $3b(b - 4) - 7(4 - b)$ |
| 11. $3a^2 + 6a - 18$ | 23. $a^2b^2c^2 - 1$ |
| 12. $-12a + 24a^3$ | |

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.-7.) 02fx (8.-12.) 02fy (13.-18.) 02fz (19.-23.) 02g0

Faktorisering deur groepering



'n Verdere metode van faktorisering gebruik groepering van terme. Ons weet dat die faktore van $3x + 3$ is 3 en $(x + 1)$ is. Soortelyk is die faktore van $2x^2 + 2x$ is $2x$ en $(x + 1)$. Gevolglik as ons 'n uitdrukking het:

$$2x^2 + 2x + 3x + 3$$

is daar geen gemene faktor van al vier terme nie, maar ons kan as volg faktoriseer:

$$(2x^2 + 2x) + (3x + 3) = 2x(x + 1) + 3(x + 1)$$

Nou kan ons sien dat daar 'n ander gemene faktor $(x + 1)$ is. Gevolglik kan ons nou skryf:

$$(x + 1)(2x + 3)$$

Ons kry dit deur die $(x + 1)$ 'uit te haal' (uit te deel) en te sien wat oorbly. Ons het $+2x$ uit die eerste term en $+3$ uit die tweede term. Dit word genoem faktorisering deur groepering.

Voorbeeld 12: Faktorisering deur groepering

PROBLEEM

Vind die faktore van $7x + 14y + bx + 2by$.

OPLOSSING

Stap 1 : Daar is geen algemene gemeenskaplike faktore nie

Stap 2 : Groepeer terme met gemene faktore saam

7 is 'n gemene faktor van die eerste twee terme en b is 'n gemene faktor van die tweede twee terme. Ons sien die verhouding van die koëffisiënte $7 : 14$ is dieselfde as $b : 2b$.

$$\begin{aligned} 7x + 14y + bx + 2by &= (7x + 14y) + (bx + 2by) \\ &= 7(x + 2y) + b(x + 2y) \end{aligned}$$

Stap 3 : Haal die gemeenskaplike faktor $(x + 2y)$ uit

$$7(x + 2y) + b(x + 2y) = (x + 2y)(7 + b)$$

OF

Stap 1 : Groepeer terme met gemene faktore saam

x is 'n gemene faktor van die eerste en derde terme en $2y$ is 'n gemene faktor van die tweede en vierde terme ($7 : b = 14 : 2b$).

Stap 2 : **Herrangskik die uitdrukking**

$$\begin{aligned} 7x + 14y + bx + 2by &= (7x + bx) + (14y + 2by) \\ &= x(7 + b) + 2y(7 + b) \end{aligned}$$

Stap 3 : **Haal die gemeenskaplike faktor $(7 + b)$ uit**

$$x(7 + b) + 2y(7 + b) = (7 + b)(x + 2y)$$

Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

Die faktore van $7x + 14y + bx + 2by$ is $(7 + b)$ en $(x + 2y)$.

Oefening 1 - 6

Faktoriseer die volgende:

1. $6x + a + 2ax + 3$

4. $a^2 - 2a - ax + 2x$

2. $x^2 - 6x + 5x - 30$

5. $5xy - 3y + 10x - 6$

3. $5x + 10y - ax - 2ay$

6. $ab - a^2 - a + b$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02gk (2.) 02gm (3.) 02gn (4.) 02gp (5.) 02gq (6.) 02gr

Faktoriserings van 'n kwadratiese drieterm



Faktoriserings kan gesien word as die omgekeerde proses van die berekening van die produk van faktore. Om 'n kwadratiese uitdrukking te faktoriseer, is dit dus nodig om die

faktore te vind wat, wanneer hulle met mekaar vermenigvuldig word, gelyk sal wees aan die oorspronklike kwadratiese uitdrukking.

Beskou 'n kwadratiese uitdrukking van die vorm: $ax^2 + bx$. Ons kan sien hier is x 'n gemeenskaplike faktor in beide terme. Dus, $ax^2 + bx$ faktoreer tot $x(ax + b)$. Byvoorbeeld, $8y^2 + 4y$ faktoreer tot $4y(2y + 1)$.

'n Ander tipe kwadratiese uitdrukking bestaan uit die verskil tussen kwadrate. Ons weet dat:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

So, $a^2 - b^2$ kan in gefaktoreerde vorm geskryf word as $(a + b)(a - b)$.

Dit beteken dat wanneer ons enige kwadratiese uitdrukking, wat bestaan uit die verskil tussen twee kwadrate, teëkom, ons onmiddellik die faktore kan neerskryf. Hierdie soort kwadratiese uitdrukking is eenvoudig om te faktoreer. Nie baie kwadratiese uitdrukkings val egter in hierdie kategorie nie, en gevolglik het ons 'n meer algemene metode nodig vir kwadrate.

Ons kan leer hoe om kwadrate te faktoreer deur twee tweeterme met mekaar te vermenigvuldig en so 'n kwadratiese uitdrukking te kry. Byvoorbeeld

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

Ons kan sien dat die x^2 term in die kwadratiese uitdrukking die produk is van die x -terme in elke hakie. Soortgelyk, die 6 in die kwadratiese uitdrukking is die produk van 2 en 3 in die hakies. Gevolglik is die middelterm die som van die twee terme.

Hoe gebruik ons hierdie inligting om die kwadratiese uitdrukking te faktoreer?

Kom ons begin faktoreer $x^2 + 5x + 6$ en sien of ons kan besluit op sekere algemene reëls.

Eerstens, skryf twee hakies neer met 'n x in elke hakie en los spasie vir die oorblywende terme.

$$(x \quad)(x \quad)$$

Besluit nou op die faktore van 6. Aangesien 6 'n positiewe getal is, sal dit wees:

Faktore van 6	
1	6
2	3
-1	-6
-2	-3

Dus het ons nou vier moontlikhede:

Opsie 1	Opsie 2	Opsie 3	Opsie 4
$(x + 1)(x + 6)$	$(x - 1)(x - 6)$	$(x + 2)(x + 3)$	$(x - 2)(x - 3)$

Vervolgens vermenigvuldig ons elke stel hakies uit om te sien watter stel gee die regte middelterm.

Opsie 1	Opsie 2	Opsie 3	Opsie 4
$(x + 1)(x + 6)$	$(x - 1)(x - 6)$	$(x + 2)(x + 3)$	$(x - 2)(x - 3)$
$x^2 + 7x + 6$	$x^2 - 7x + 6$	$x^2 + 5x + 6$	$x^2 - 5x + 6$

Ons kan sien dat Opsie 3, $(x + 2)(x + 3)$, die korrekte oplossing is.

Die proses van faktorisering is hoofsaaklik 'n proses van opsies identifiseer en evalueer, maar daar is inligting wat die proses kan vergemaklik.

▶ Video: MG10064 by www.everythingmaths.co.za

Algemene prosedure vir die faktorisering van 'n drieterm EMDQ

1. Haal enige gemeenskaplike faktore van die koëffisiënte uit om 'n uitdrukking te kry van die vorm $ax^2 + bx + c$ waar a , b en c geen gemene faktore het nie en a positief is.

2. Skryf twee hakies neer met 'n x in elke hake en plek vir die oorblywende terme:

$$(x \quad)(x \quad)$$

3. Skryf 'n stel faktore neer vir a en c .
4. Skryf 'n stel opsies neer vir die moontlike faktore van die kwadratiese drieterm deur die faktore van a en c te gebruik.
5. Brei al die opsies uit om te sien watter stel vir jou die korrekte antwoord gee.

Let op: as c positief is, moet albei die faktore van c positief of albei negatief wees. Die faktore is beide negatief indien b negatief is, en beide positief indien b positief is. As c negatief is, beteken dit slegs een van die faktore van c is negatief, en die ander een is positief. Wanneer jy 'n antwoord gekry het, brei weer jou hakies uit om te toets of dit reg uitwerk.

Voorbeeld 13: Faktorisering van 'n kwadratiese drieterm

PROBLEEM

Faktoriseer: $3x^2 + 2x - 1$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Die kwadraat is in die regte vorm** $ax^2 + bx + c$

Stap 2 : **Skryf die stel faktore neer van a en c**

$$(x \quad)(x \quad)$$

Die moontlike faktore van a is: (1; 3).

Die moontlike faktore van c is: $(-1; 1)$ of $(1; -1)$.

Skryf die groep opsies neer van die moontlike faktore van die kwadratiese uitdrukking deur die faktore van a en c te gebruik. Daar is twee moontlike oplossings.

Opsie 1	Opsie 2
$(x - 1)(3x + 1)$	$(x + 1)(3x - 1)$
$3x^2 - 2x - 1$	$3x^2 + 2x - 1$

Stap 3 : **Toets of jou oplossing korrek is deur uitbreiding van die faktore**

$$\begin{aligned}(x + 1)(3x - 1) &= 3x^2 - x + 3x - 1 \\ &= 3x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

Die faktore van $3x^2 + 2x - 1$ is $(x + 1)$ en $(3x - 1)$.

Oefening 1 - 7

1. Faktoriseer die volgende:

(a) $x^2 + 8x + 15$

(d) $x^2 + 9x + 14$

(b) $x^2 + 10x + 24$

(e) $x^2 + 15x + 36$

(c) $x^2 + 9x + 8$

(f) $x^2 + 12x + 36$

2. Ontbind die volgende in faktore:

(a) $x^2 - 2x - 15$

(d) $x^2 + x - 20$

(b) $x^2 + 2x - 3$

(e) $x^2 - x - 20$

(c) $x^2 + 2x - 8$

(f) $2x^2 + 22x + 20$

3. Vind die faktore van die volgende drieterme:

(a) $3x^2 + 19x + 6$

(c) $12x^2 + 8x + 1$

(b) $6x^2 + 7x + 2$

(d) $8x^2 + 6x + 1$

4. Faktoriseer:

(a) $3x^2 + 17x - 6$

(c) $8x^2 - 6x + 1$

(b) $7x^2 - 6x - 1$

(d) $6x^2 - 15x - 9$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02gs (2.) 02gt (3.) 02gu (4.) 02gv

Som en verskil van twee derdemagte



Ons kyk vervolgens na twee spesiale resultate wat verkry word as 'n tweeterm en 'n drieterm met mekaar vermenigvuldig word.

Som van twee derdemagte:

$$\begin{aligned}
 (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) \\
 &= [x(x^2) + x(-xy) + x(y^2)] + [y(x^2) + y(-xy) + y(y^2)] \\
 &= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 \\
 &= x^3 + y^3
 \end{aligned}$$

Verskil van twee derdemagte:

$$\begin{aligned}
 (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) \\
 &= [x(x^2) + x(xy) + x(y^2)] - [y(x^2) + y(xy) + y(y^2)] \\
 &= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 \\
 &= x^3 - y^3
 \end{aligned}$$

Ons het gesien dat:

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\
 x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)
 \end{aligned}$$

Ons gebruik hierdie twee basiese uitdrukkings om meer komplekse voorbeelde te faktoreer.

Voorbeeld 14: Faktoriseer 'n verskil van twee derdemagte**PROBLEEM**

Faktoriseer: $x^3 - 1$.

OPLOSSING

Stap 1 : *Neem die derdemagswortel van die terme wat volkome derdemagte is*

Let op $\sqrt[3]{x^3} = x$ en $\sqrt[3]{1} = 1$. Dit gee die terme in die eerste hakie.

Stap 2 : *Gebruik inspeksie om die terme in die tweede hakie te vind*

$$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Stap 3 : *Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking reg gefaktoriseer is*

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 + x + 1) &= x(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x + 1) \\ &= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \\ &= x^3 - 1\end{aligned}$$

Voorbeeld 15: Faktoriseer 'n som van twee derdemagte**PROBLEEM**

Faktoriseer: $x^3 + 8$.

OPLOSSING

Stap 1 : *Neem die derdemagswortel van die terme wat volkome derdemagte*

is

Let op $\sqrt[3]{x^3} = x$ en $\sqrt[3]{8} = 2$. Dit gee die terme in die eerste hakie.

Stap 2 : Gebruik inspeksie om die terme in die tweede hakie te vind

$$(x^3 + 8) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Stap 3 : Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking reg gefaktoriseer is

$$\begin{aligned}(x + 2)(x^2 - 2x + 4) &= x(x^2 - 2x + 4) + 2(x^2 - 2x + 4) \\ &= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^3 + 8\end{aligned}$$

Voorbeeld 16: Faktoriseer 'n verskil van twee derdemagte

PROBLEEM

Faktoriseer: $16y^3 - 432$.

OPLOSSING

Stap 1 : Haal die 'n gemeenskaplike faktor 16 uit

$$16y^3 - 432 = 16(y^3 - 27)$$

Stap 2 : Neem die derdemagswortel van die terme wat volkome derdemagte is

Let op $\sqrt[3]{y^3} = y$ en $\sqrt[3]{27} = 3$. Dit gee die terme in die eerste hakie.

Stap 3 : Gebruik inspeksie om die terme in die tweede hakie te vind

$$16(y^3 - 27) = 16(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$

Stap 4 : **Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking reg gefaktoriseer is**

$$\begin{aligned} 16(y - 3)(y^2 + 3y + 9) &= 16[(y(y^2 + 3y + 9) - 3(y^2 + 3y + 9))] \\ &= 16[y^3 + 3y^2 + 9y - 3y^2 - 9y - 27] \\ &= 16y^3 - 432 \end{aligned}$$

Voorbeeld 17: Faktoriseer 'n som van twee derdemagte

PROBLEEM

Faktoriseer: $8t^3 + 125p^3$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Daar is geen gemeenskaplike faktor nie**

Stap 2 : **Neem die derdemagswortels**

Let op dat $\sqrt[3]{8t^3} = 2t$ en $\sqrt[3]{125p^3} = 5p$. Dit gee die terme in die eerste hakie.

Stap 3 : **Gebruik inspeksie om die drie terme in die tweede hakie te vind**

$$\begin{aligned} (8t^3 + 125p^3) &= (2t + 5p) [(2t)^2 - (2t)(5p) + (5p)^2] \\ &= (2t + 5p)(4t^2 - 10tp + 25p^2) \end{aligned}$$

Stap 4 : **Brei die hakies uit om te kontroleer dat die uitdrukking korrek gefaktoriseer is**

$$\begin{aligned}
 (2t + 5p)(4t^2 - 10tp + 25p^2) &= 2t(4t^2 - 10tp + 25p^2) + 5p(4t^2 - 10tp + 25p^2) \\
 &= 8t^3 - 20pt^2 + 50p^2t + 20pt^2 - 50p^2t + 125p^3 \\
 &= 8t^3 + 125p^3
 \end{aligned}$$

Oefening 1 - 8

Faktoriseer:

1. $x^3 + 8$

2. $27 - m^3$

3. $2x^3 - 2y^3$

4. $3k^3 + 27q^3$

5. $64t^3 - 1$

6. $64x^2 - 1$

7. $125x^3 + 1$

8. $25x^2 + 1$

9. $z - 125z^4$

10. $8m^6 + n^9$

11. $p^{15} - \frac{1}{8}y^{12}$

12. $1 - (x - y)^3$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.-5.) 02gw (6.-10.) 02gx (11.-12.) 02gy

1.7 Vereenvoudiging van breuke



In vorige grade is die prosedures vir bewerkings met breuke bestudeer.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} & (b \neq 0; d \neq 0) \\
 2. \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} & (b \neq 0) \\
 3. \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} & (b \neq 0); (c \neq 0); (d \neq 0)
 \end{aligned}$$

Let op: om te deel deur 'n breuk is dieselfde as om te vermenigvuldig met die resiproom.

In sommige gevalle van die vereenvoudiging van 'n algebraïese uitdrukking, sal die uitdrukking 'n breuk wees. Byvoorbeeld,

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 3}$$

het 'n tweeterm in die noemer en 'n kwadratiese tweeterm in die teller. Jy kan die verskillende metodes van faktorisering gebruik om die uitdrukking te vereenvoudig.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 3x}{x + 3} &= \frac{x(x + 3)}{x + 3} \\ &= x \quad (x \neq -3)\end{aligned}$$

As $x = -3$, sal die noemer, $x + 3 = 0$, wees en die breuk ongedefinieer.

▶ Video: VMacc by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 18: Vereenvoudiging van breukuitdrukings

PROBLEEM

Vereenvoudig: $\frac{ax - b + x - ab}{ax^2 - abx}$, ($x \neq 0$; $x \neq b$).

OPLOSSING

Stap 1 : Gebruik groepering vir die teller en haal 'n gemene faktor van ax uit in die noemer.

$$\frac{(ax - ab) + (x - b)}{ax^2 - abx} = \frac{a(x - b) + (x - b)}{ax(x - b)}$$

Stap 2 : Haal gemene faktor $(x - b)$ uit in die teller

$$= \frac{(x - b)(a + 1)}{ax(x - b)}$$

Stap 3 : Deel die gemeenskaplike faktor uit in die noemer en die teller om

die finale antwoord te gee

$$= \frac{a+1}{ax}$$

Voorbeeld 19: Vereenvoudig breukuitdrukking

PROBLEEM

Vereenvoudig: $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \div \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x}$, ($x \neq 0; x \neq \pm 2$).

OPLOSSING

Stap 1 : **Faktoriseer die noemer en die teller**

$$= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x(x+1)}{x(x+2)}$$

Stap 2 : **Verander deling na vermenigvuldig met die resipook**

$$= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x(x+2)}{x(x+1)}$$

Stap 3 : **Die vereenvoudigde antwoord is**

$$= 1$$

Voorbeeld 20: Vereenvoudiging van breuke**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3+x-4}{x^2-4}, (x \neq \pm 2)$

OPLOSSING

Stap 1 : **Faktoriseer die noemers**

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3+x-4}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 2 : **Maak al die noemers dieselfde sodat die breuke kan opgestel en afgetrek word**

Die kleinste gemene noemer is $(x-2)(x+2)$

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{(x^2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x^3+x-4}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 3 : **Skryf as een breuk**

$$\frac{x-2 + (x^2)(x+2) - (x^3+x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 4 : **Vereenvoudig**

$$\frac{x-2 + x^3 + 2x^2 - x^3 - x + 4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2 + 2}{(x+2)(x-2)}$$

Stap 5 : **Haal die gemene faktor uit en skryf die finale antwoord**

$$\frac{2(x^2 + 1)}{(x+2)(x-2)}$$

Voorbeeld 21: Vereenvoudig breukuitdrukking**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $\frac{2}{x^2 - x} + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} - \frac{x}{x^2 - 1}$, ($x \neq 0; x \neq \pm 1$).

OPLOSSING

Stap 1 : **Faktoriseer die noemers en die tellers**

$$\frac{2}{x(x-1)} + \frac{(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Stap 2 : **Skryf as een breuk**

$$\frac{2(x+1) + x(x+1) - x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

$$\frac{2x + 2 + x^2 + x - x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x + 2}{x(x-1)(x+1)}$$

Oefening 1 - 9

Vereenvoudig (aanvaar alle noemers is ongelyk aan nul):

1. $\frac{3a}{15}$

2. $\frac{2a + 10}{4}$

3. $\frac{5a + 20}{a + 4}$

4. $\frac{a^2 - 4a}{a - 4}$

5. $\frac{3a^2 - 9a}{2a - 6}$

6. $\frac{9a + 27}{9a + 18}$

7. $\frac{6ab + 2a}{2b}$

8. $\frac{16x^2y - 8xy}{12x - 6}$

9. $\frac{4xyp - 8xp}{12xy}$
10. $\frac{3a + 9}{14} \div \frac{7a + 21}{a + 3}$
11. $\frac{a^2 - 5a}{2a + 10} \times \frac{4a}{3a + 15}$
12. $\frac{3xp + 4p}{8p} \div \frac{12p^2}{3x + 4}$
13. $\frac{24a - 8}{12} \div \frac{9a - 3}{6}$
14. $\frac{a^2 + 2a}{5} \div \frac{2a + 4}{20}$
15. $\frac{p^2 + pq}{7p} \times \frac{21q}{8p + 8q}$
16. $\frac{5ab - 15b}{4a - 12} \div \frac{6b^2}{a + b}$
17. $\frac{f^2a - fa^2}{f - a}$
18. $\frac{2}{xy} + \frac{4}{xz} + \frac{3}{yz}$
19. $\frac{5}{t - 2} - \frac{1}{t - 3}$
20. $\frac{k + 2}{k^2 + 2} - \frac{1}{k + 2}$
21. $\frac{t + 2}{3q} + \frac{t + 1}{2q}$
22. $\frac{3}{p^2 - 4} + \frac{2}{(p - 2)^2}$
23. $\frac{x}{x + y} + \frac{x^2}{y^2 - x^2}$
24. $\frac{1}{m + n} + \frac{3mn}{m^3 + n^3}$
25. $\frac{h}{h^3 - f^3} - \frac{1}{h^2 + hf + f^2}$
26. $\frac{x^2 - 1}{3} \times \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2}$
27. $\frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^3} - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$
28. $\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{2x}{x^3 - 1}$
29. $\frac{p^3 + q^3}{p^2} \times \frac{3p - 3q}{p^2 - q^2}$
30. $\frac{1}{a^2 - 4ab + 4b^2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 - 8b^3} - \frac{1}{a^2 - 4b^2}$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.-7.) 02h8 (8.-13.) 02h9 (14.-20.) 02ha (21.-26.) 02hb (27.-30.) 02hc

Hoofstuk 1 | Opsomming

 Opsommingsaanbieding: VMcyl by www.everythingmaths.co.za

- n Rasionale getal is enige getal wat geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b heelgetalle is en $b \neq 0$.
- Die volgende is rasionale getalle:
 - Breuke waarvan beide die teller en die noemer heeltallig is
 - Heelgetalle
 - Desimale getalle wat eindig
 - Desimale getalle wat repeteer

- Irrasionale getalle is getalle wat nie as 'n breuk met 'n heeltallige teller en noemer geskryf kan word nie.
- Indien die n^{de} magswortel van 'n getal nie as 'n rasionale getal geskryf kan word nie, noem ons dit 'n wortelgetal.
- As a en b positiewe getalle is met $a < b$, dan $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
- 'n Binomiaal is 'n wiskundige uitdrukking met twee terme.
- Die produk van twee identiese binomiale staan bekend as die vierkant of kwadraat van die binomiaal.
- Die verskil tussen twee kwadrate kry ons wanneer ons $(ax + b)$ met $(ax - b)$ vermenigvuldig.
- Faktorisering is die omgekeerde proses van die uitbreiding van hakies.
- $(A + B)(C + D + E) = A(C + D + E) + B(C + D + E)$ help ons om 'n binomiaal en 'n trinomiaal te vermenigvuldig.
- Uithaal van 'n gemeenskaplike faktor is die basiese metode van faktorisering.
- Ons gebruik dikwels groepering om polinome te faktoreer.
- Om 'n kwadratiese drieterm te faktoreer, moet ons die twee tweeterme vind wat met mekaar vermenigvuldig is om die kwadratiese drieterm te gee.
- Die som van derdemagte is: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
- Die verskil van derdemagte is: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
- Ons kan breuke vereenvoudig deur metodes van faktorisering toe te pas.
- Slegs faktore kan uitgekanselleer word in breuke, nooit terme nie.
- Breuke kan bymekaargetel of van mekaar afgetrek word. Om dit te kan doen, moet al die breuke dieselfde noemers hê.

Hoofstuk 1

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Indien a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c irrasionaal is, watter van die volgende is rasionaal?

a. $\frac{-b}{a}$

b. $c \div c$

c. $\frac{a}{c}$

d. $\frac{1}{c}$

2. Skryf elkeen van die volgende as 'n onegte breuk:
- 0,12
 - 0,006
 - 1,59
 - $12,27\bar{7}$
3. Wys dat die desimaal $3,21\bar{18}$ 'n rasionale getal is.
4. Druk $0,7\bar{8}$ uit as 'n breuk $\frac{a}{b}$ waar $a, b \in \mathbb{Z}$ (wys alle stappe).
5. Skryf die volgende rasionale getalle tot 2 desimale plekke:
- $\frac{1}{2}$
 - 1
 - $0,1111\bar{1}$
 - $0,9999\bar{1}$
6. Rond die volgende getalle af tot 3 desimale plekke:
- 3,141592654...
 - 1,618 033 989 ...
 - 1,41421356...
 - 2,71828182845904523536...
7. Gebruik jou sakrekenaar om die volgende irrasionale getalle tot 4 desimale plekke te skryf:
- $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{3}$
 - $\sqrt{5}$
 - $\sqrt{6}$
8. Gebruik jou sakrekenaar (waar nodig) om die volgende getalle tot 5 desimale plekke te skryf en dui aan of die getal rasionaal of irrasionaal is:
- $\sqrt{8}$
 - $\sqrt{768}$
 - $\sqrt{0,49}$
 - $\sqrt{0,0016}$
 - $\sqrt{0,25}$
 - $\sqrt{36}$
 - $\sqrt{1960}$
 - $\sqrt{0,0036}$
 - $-8\sqrt{0,04}$
 - $5\sqrt{80}$
9. Skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke, en skryf die afgeronde getal dan as 'n rasionale getal om 'n benadering van die irrasionale getal te verkry.

a. 3,141592654...

c. 1,41421356...

b. 1,618 033 989 ...

d. 2,71828182845904523536...

10. Bepaal sonder 'n sakrekenaar tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende irrasionale getalle lê:

a. $\sqrt{5}$

e. $\sqrt[3]{5}$

b. $\sqrt{10}$

f. $\sqrt[3]{10}$

c. $\sqrt{20}$

g. $\sqrt[3]{20}$

d. $\sqrt{30}$

h. $\sqrt[3]{30}$

11. Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt{7}$ lê op die getallelyn.

12. Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt{15}$ lê op die getallelyn.

13. Faktoriseer:

a. $a^2 - 9$

l. $(16 - x^4)$

b. $m^2 - 36$

m. $7x^2 - 14x + 7xy - 14y$

c. $9b^2 - 81$

n. $y^2 - 7y - 30$

d. $16b^6 - 25a^2$

o. $1 - x - x^2 + x^3$

e. $m^2 - \frac{1}{9}$

p. $-3(1 - p^2) + p + 1$

f. $5 - 5a^2b^6$

q. $x - x^3 + y - y^3$

g. $16ba^4 - 81b$

r. $x^2 - 2x + 1 - y^4$

h. $a^2 - 10a + 25$

s. $4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3)$

i. $16b^2 + 56b + 49$

t. $3p^3 - \frac{1}{9}$

j. $2a^2 - 12ab + 18b^2$

u. $8x^6 - 125y^9$

k. $-4b^2 - 144b^8 + 48b^5$

v. $(2 + p)^3 - 8(p + 1)^3$

14. Vereenvoudig die volgende:

a. $(a - 2)^2 - a(a + 4)$

e. $\frac{p^2 - q^2}{p} \div \frac{p + q}{p^2 - pq}$

b. $(5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2)$

f. $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3}$

c. $(2m - 3)(4m^2 + 9)(2m + 3)$

g. $\frac{1}{a + 7} - \frac{a + 7}{a^2 - 49}$

d. $(a + 2b - c)(a + 2b + c)$

h. $\frac{x+2}{2x^3} + 16$

j. $\frac{x^2+2x}{x^2+x+6} \times \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$

i. $\frac{1-2a}{4a^2-1} - \frac{a-1}{2a^2-3a+1} - \frac{1}{1-a}$

15. Wys dat $(2x-1)^2 - (x-3)^2$ vereenvoudig kan word tot $(x+2)(3x-4)$.

16. Bepaal wat moet by $x^2 - x + 4$ getel word sodat dit gelyk is aan $(x+2)^2$.

17. Evalueer $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ as $x = 7,85$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.
Toon jou bewerkings.

18. Met watter uitdrukking moet $(a-2b)$ vermenigvuldig word om 'n produk van $a^3 - 8b^3$ te kry?

19. Met watter uitdrukking moet $27x^3 + 1$ gedeel word om 'n kwosiënt van $3x + 1$ te kry?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02i4

(2.) 02i5

(3.) 02i6

(4.) 02i7

(5.) 02i8

(6.) 02i9

(7.) 02ia

(8.) 02ib

(9.) 02ic

(10.) 02id

(11.) 02ie

(12.) 02if

(13a-k.) 02ig

(13l-p.) 02sp

(13q-t.) 02sq

(13u-v.) 02sr

(14a-d.) 02ih

(14e-f.) 02ss

(14g-j.) 02te

(15.) 02ii

(16.) 02ij

(17.) 02ik

(18.) 02im

(19.) 02in

Vergelykings en ongelykhede 2

2.1 Oplos van lineêre vergelykings



Die eenvoudigste vergelyking om op te los is 'n lineêre vergelyking. 'n Vergelyking word lineêr genoem indien die hoogste mag van die veranderlike 1 is. Die volgende is voorbeelde van lineêre vergelykings:

$$2x + 2 = 1$$

$$\frac{2-x}{3x+1} = 2$$

$$4(2x-9) - 4x = 4 - 6x$$

$$\frac{2a-3}{3} - 3a = \frac{a}{3}$$

Om 'n vergelyking op te los beteken om die waarde van die veranderlike te vind wat die vergelyking waar maak. Byvoorbeeld, om die eenvoudige vergelyking $x + 1 = 1$ op te los moet ons die waarde van x vind wat die linkerkant gelyk aan die regtekant sal maak. Die oplossing is $x = 1$.

Die oplossing, of die wortel van die vergelyking, is die waarde van die veranderlike wat die vergelyking bevredig. Vir lineêre vergelykings is daar hoogstens een oplossing vir die vergelyking.

Om vergelykings op te los gebruik ons algebraïese metodes wat uitbreiding van faktore, groepeer van terme en faktorisering insluit.

By voorbeeld,

$$2x + 2 = 1$$

$$2x = 1 - 2 \quad (\text{groepeer soortgelyke terme saam})$$

$$2x = -1 \quad (\text{vereenvoudig})$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad (\text{deel weerskante met 2})$$

Vervang $x = -\frac{1}{2}$ in die oorspronklike vergelyking om die antwoord te bevestig:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= 2x + 2 \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \\ &= -1 + 2 \\ &= 1 \\ \text{RK} &= 1\end{aligned}$$

Daarom is $x = -\frac{1}{2}$ 'n geldige oplossing.

Metode: Oplos van lineêre vergelykings



Die algemene stappe in die oplossing van lineêre vergelykings is:

1. Verwyder alle hakies in die vergelyking.
2. Herrangskik die terme van die vergelyking sodat al die terme wat die veranderlike bevat aan een kant van die gelykaanteken is en alle konstantes aan die ander kant.
3. Groepeer alle soortgelyke terme saam en vereenvoudig so ver as moontlik.
4. Faktoriseer, indien nodig.
5. Vind die oplossing en skryf die antwoord(e) neer.
6. Stel die oplossing in die oorspronklike vergelyking in om die antwoord te bevestig.

Onthou: Die twee kante van 'n vergelyking moet altyd balanseer; wat jy doen aan die een kant moet jy doen aan die ander kant. 'n Moontlike oplossing wat NIE die vergelyking bevredig nie, is nie geldig nie.

Voorbeeld 1: Los lineêre vergelykings op

PROBLEEM

Los op vir x : $4(2x - 9) - 4x = 4 - 6x$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Brei die hakies uit en vereenvoudig**

$$4(2x - 9) - 4x = 4 - 6x$$

$$8x - 36 - 4x = 4 - 6x$$

$$8x - 4x + 6x = 4 + 36$$

$$10x = 40$$

Stap 2 : **Deel weerskante deur 10**

$$x = 4$$

Stap 3 : **Stel die oplossing in die oorspronklike vergelyking in**

$$\text{LK} = 4[2(4) - 9] - 4(4)$$

$$= 4(8 - 9) - 16$$

$$= 4(-1) - 16$$

$$= -4 - 16$$

$$= -20$$

$$\text{RK} = 4 - 6(4)$$

$$= 4 - 24$$

$$= -20$$

$$\therefore \text{LK} = \text{RK}$$

Aangesien beide kante gelyk is, is die antwoord korrek.

Voorbeeld 2: Oplos van lineêre vergelykings**PROBLEEM**

Los op vir x : $\frac{2-x}{3x+1} = 2$.

OPLOSSING

Stap 1 : Ons begin deur weerskante van die vergelyking te vermenigvuldig met $(3x + 1)$

Omdat deling met 0 ontoelaatbaar is, is daar 'n beperking op die waarde van $(x \neq -\frac{1}{3})$.

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{3x+1} &= 2 \\ (2-x) &= 2(3x+1)\end{aligned}$$

Stap 2 : Brei hakies uit en vereenvoudig

$$\begin{aligned}2-x &= 6x+2 \\ -x-6x &= 2-2 \\ -7x &= 0\end{aligned}$$

Stap 3 : Deel weerskante deur -7

$$\begin{aligned}x &= \frac{0}{-7} \\ x &= 0\end{aligned}$$

Let op dat 0 gedeel deur enige ander getal is 0.

Stap 4 : Stel die oplossing in die oorspronklike vergelyking in:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \frac{2-(0)}{3(0)+1} \\ &= 2 \\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Aangesien weerskante gelyk is, is die antwoord korrek.

Voorbeeld 3: Oplos van lineêre vergelykings**PROBLEEM**

Los op vir a : $\frac{2a-3}{3} - 3a = \frac{a}{3}$.

OPLOSSING

Stap 1 : *Begin deur elk van die terme in die vergelyking te vermenigvuldig met 3 en vervolgens te vereenvoudig*

$$2a - 3 - 9a = a$$

$$-7a - 3 = a$$

Stap 2 : *Herrangskik en vereenvoudig*

$$-7a - a = 3$$

$$-8a = 3$$

Stap 3 : *Deel weerskante deur -8*

$$a = -\frac{3}{8}$$

Stap 4 : *Stel die oplossing in die oorspronklike vergelyking in*

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{2(-\frac{3}{8}) - 3}{3} - 3(-\frac{3}{8}) \\ &= \frac{(-\frac{3}{4}) - \frac{12}{4}}{3} + \frac{9}{8} \\ &= \left[-\frac{15}{4} \times \frac{1}{3}\right] + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{10}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{RK} &= \frac{-\frac{3}{8}}{3} \\
 &= \frac{-\frac{3}{8}}{3} \\
 &= -\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{LK} = \text{RK}$$

Beide kante is gelyk, dus die oplossing is reg.

Oefening 2 - 1

Oplossing van lineêre vergelykings (aanvaar alle noemers is ongelyk aan nul):

1. $2y - 3 = 7$
2. $-3y = 0$
3. $16y + 4 = -10$
4. $12y + 0 = 144$
5. $7 + 5y = 62$
6. $55 = 5x + \frac{3}{4}$
7. $5x = 2x + 45$
8. $23x - 12 = 6 + 3x$
9. $12 - 6x + 34x = 2x - 24 - 64$
10. $6x + 3x = 4 - 5(2x - 3)$
11. $18 - 2p = p + 9$
12. $\frac{4}{p} = \frac{16}{24}$
13. $-(-16 - p) = 13p - 1$
14. $3f - 10 = 10$
15. $3f + 16 = 4f - 10$
16. $10f + 5 = -2f - 3f + 80$
17. $8(f - 4) = 5(f - 4)$
18. $6 = 6(f + 7) + 5f$
19. $(a - 1)^2 - 2a = (a + 3)(a - 2) - 3$
20. $-7x = x + 8(1 - x)$
21. $5 - \frac{7}{b} = \frac{2(b + 4)}{b}$
22. $\frac{x + 2}{4} - \frac{x - 6}{3} = \frac{1}{2}$
23. $3 - \frac{y - 2}{4} = 4$
24. $\frac{a + 1}{a + 2} = \frac{a - 3}{a + 1}$
25. $(x - 3)(x + 2) = x(x - 4)$
26. $1,5x + 3,125 = 1,25x$
27. $\frac{1}{3}P + \frac{1}{2}P - 10 = 0$
28. $1\frac{1}{4}(x - 1) - 1\frac{1}{2}(3x + 2) = 0$
29. $\frac{5}{2a} + \frac{1}{6a} - \frac{3}{a} = 2$
30. $\frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x} - \frac{5}{6x} = 0$

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.-5.) 02tf (6.-10.) 02tg (11.-15.) 02th (16.-20.) 02ti (21.-24) 02st
 (25.-30.) 02su

2.2 Oplos van kwadratiese vergelykings EMDV

'n Kwadratiese vergelyking, is 'n vergelyking waar die mag van die veranderlike hoogstens 2 is.

Die volgende is voorbeelde van kwadratiese vergelykings:

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 2x &= 1 \\
 3x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 0 &= -2x^2 + 4x - 2
 \end{aligned}$$

Kwadratiese vergelykings verskil van lineêre vergelykings daarin dat 'n lineêre vergelyking slegs een oplossing het, terwyl 'n kwadratiese vergelyking hoogstens twee oplossings het. Daar is spesiale gevalle waar 'n kwadratiese vergelyking slegs een oplossing het.

Ons kan 'n kwadratiese vergelyking oplos deur faktoriserings gebruik. Byvoorbeeld, om $2x^2 - x - 3 = 0$ op te los, moet ons die uitdrukking in sy ekwivalente gefaktoriseerde vorm skryf as $(x + 1)(2x - 3) = 0$. Let op: as $a \times b = 0$, dan $a = 0$ of $b = 0$.

 Video: VMaec by www.everythingmaths.co.za

Metode: Oplos van kwadratiese vergelykings EMDW

1. Skryf die vergelyking in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Deel eerste die hele vergelyking deur enige gemene faktore van die koëffisiënte, ten einde 'n vergelyking te kry van die vorm $ax^2 + bx + c = 0$ waar a , b en c geen

gemeenskaplike faktore het nie. Byvoorbeeld $2x^2 + 4x + 2 = 0$ kan geskryf word as $x^2 + 2x + 1 = 0$, deur te deel met 2.

3. Skryf $ax^2 + bx + c = 0$ in terme van sy faktore $(rx + s)(ux + v) = 0$.
4. Gevolglik is $(rx + s) = 0$ of $(ux + v) = 0$, en die twee oplossings is dus $x = -\frac{s}{r}$ of $x = -\frac{v}{u}$.
5. Vervang elke moontlike waarde van die oplossing in die oorspronklike vergelyking in om te toets of dit 'n geldige oplossing is.

Voorbeeld 4: Oplos van kwadratiese vergelykings

PROBLEEM

Los op vir x : $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Die vergelyking is alreeds in die regte vorm** $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 2 : **Faktoriseer**

$$(x + 1)(3x - 1) = 0$$

Stap 3 : **Los vir beide wortels op**

Ons het

$$x + 1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

OF

$$3x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

Stap 4 : **Kontroleer beide antwoorde deur instelling in die oorspronklike vergelyking**

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

Die oplossing van $3x^2 + 2x - 1 = 0$ is dus $x = -1$ of $x = \frac{1}{3}$.

Voorbeeld 5: Oplos van kwadratiese vergelykings**PROBLEEM**

Vind die wortels van: $0 = -2x^2 + 4x - 2$.

OPLOSSING

Stap 1 : Deel weerskante van die vergelyking deur gemeenskaplike faktor -2

$$-2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Stap 2 : Die vergelyking is in die regte vorm $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 3 : Faktoriseer

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

Stap 4 : Die kwadratiese uitdrukking is 'n volkome vierkant

Hierdie is 'n voorbeeld van 'n spesiale situasie waar daar net een oplossing vir die kwadratiese vergelyking is

$$x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

Stap 5 : Stel die oplossing in die oorspronklike vergelyking in om dit te toets

Stap 6 : Skryf die finale antwoord

Die oplossing van $0 = -2x^2 + 4x - 2$ is $x = 1$.

Oefening 2 - 2

Los die volgende vergelykings op:

- | | |
|---|---|
| 1. $9x^2 - 6x - 8 = 0$ | 12. $t^2 = 3t$ |
| 2. $5x^2 - 21x - 54 = 0$ | 13. $x^2 - 10x = -25$ |
| 3. $4y^2 - 9 = 0$ | 14. $x^2 = 18$ |
| 4. $4x^2 - 16x - 9 = 0$ | 15. $p^2 - 6p = 7$ |
| 5. $4x^2 - 12x = -9$ | 16. $4x^2 - 17x - 77 = 0$ |
| 6. $20m + 25m^2 = 0$ | 17. $14x^2 + 5x = 6$ |
| 7. $2x^2 - 5x - 12 = 0$ | 18. $2x^2 - 2x = 12$ |
| 8. $-75x^2 + 290x = 240$ | 19. $\frac{a+1}{3a-4} + \frac{9}{2a+5} + \frac{2a+3}{2a+5} = 0$ |
| 9. $2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3}$ | 20. $\frac{3}{9a^2 - 3a + 1} - \frac{3a+4}{27a^3 + 1}$ |
| 10. $x^2 - 4x = -4$ | $= \frac{1}{9a^2 - 1}$ |
| 11. $-x^2 + 4x - 6 = 4x^2 - 14x + 3$ | |

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.-5.) 02tj (6.-11.) 02tk (12.-18.) 02sv (19.-20.) 02sw

2.3

Oplossing van gelyktydige vergelykings



Tot dusver het alle vergelykings slegs een onbekende veranderlike gehad wat ons moes vind. Wanneer twee onbekendes bepaal moet word, het ons twee vergelykings nodig. Hierdie vergelykings word gelyktydige vergelykings genoem. Die oplossing vir die stelsel van gelyktydige vergelykings is die waardes van die veranderlikes wat die stelsel van vergelykings gelyktydig sal bevredig. In die algemeen beteken dit indien daar n onbekende veranderlikes is, benodig ons n vergelykings om 'n oplossing vir elk van die n veranderlikes te vind.

'n Voorbeeld van 'n stel gelyktydige vergelykings is:

$$x + y = -1$$

$$3 = y - 2x$$

Ons het twee selfstandige vergelykings om op te los vir twee onbekende veranderlikes. Ons kan gelyktydige vergelykings algebraïes oplos deur vervanging en uitskakeling as metodes te gebruik. Ons sal ook wys dat 'n stelsel gelyktydige vergelykings grafies opgelos kan word.

▶ Video: VMaex by www.everythingmaths.co.za

Oplossing deur vervanging



- Probeer om een van die vergelykings op te los vir een van die veranderlikes.
- Vervang die resultaat in die ander vergelyking. Deur dit te doen verminder die hoeveelheid vergelykings en ook die hoeveelheid onbekende veranderlikes met 1.
- Hierdie proses word herhaal tot 'n enkele vergelyking met 1 veranderlike oorbly, wat (hopelik) opgelos kan word.
- Vervang hierdie oplossing terug in die oorspronklike vergelyking om die waarde te vind van die ander onbekende veranderlike.

Voorbeeld 6: Gelyktydige vergelykings

PROBLEEM

Los op vir x en y :

$$x - y = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$3 = y - 2x \quad \dots\dots\dots (2)$$

OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik vergelyking (1) om x uit te druk in terme van y**

$$x = y + 1$$

Stap 2 : **Vervang x terug in vergelyking (2) en los vir y op**

$$3 = y - 2(y + 1)$$

$$3 = y - 2y - 2$$

$$5 = -y$$

$$\therefore y = -5$$

Stap 3 : **Vervang y terug in vergelyking (1) en los vir x op**

$$x = (-5) + 1$$

$$\therefore x = -4$$

Stap 4 : **Toets oplossing deur instelling in beide oorspronklike vergelykings**

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

$$x = -4$$

$$y = -5$$

Voorbeeld 7: Gelyktydige vergelykings**PROBLEEM**

Los die volgende stelsel gelyktydige vergelykings op:

$$4y + 3x = 100 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$4y - 19x = 12 \quad \dots\dots\dots (2)$$

OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik een van die vergelykings om x uit te druk in terme van y**

$$4y + 3x = 100$$

$$3x = 100 - 4y$$

$$x = \frac{100 - 4y}{3}$$

Stap 2 : **Vervang x in vergelyking (2) en los vir y op**

$$4y - 19\left(\frac{100 - 4y}{3}\right) = 12$$

$$12y - 19(100 - 4y) = 36$$

$$12y - 1\,900 + 76y = 36$$

$$88y = 1\,936$$

$$\therefore y = 22$$

Stap 3 : **Vervang y terug in vergelyking (1) en los vir x op**

$$x = \frac{100 - 4(22)}{3}$$

$$= \frac{100 - 88}{3}$$

$$= \frac{12}{3}$$

$$\therefore x = 4$$

Stap 4 : **Toets die oplossing deur instelling in beide oorspronklike vergelykings**

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

$$x = 4$$

$$y = 22$$

Los op deur middel van uitskakeling



Voorbeeld 8: Gelyktydige vergelykings

PROBLEEM

Los die volgende stelsel van vergelykings op:

$$3x + y = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$6x - y = 25 \quad \dots\dots\dots (2)$$

OPLOSSING

Stap 1 : **Maak die koëffisiënte van een van die veranderlikes dieselfde in beide vergelykings**

Die koëffisiënte van y is 1 en -1 . Elimineer die veranderlike y deur

die twee vergelykings bymekaar te tel:

$$\begin{array}{rcl} 3x + y & = & 2 \\ + \quad 6x - y & = & 25 \\ \hline 9x + 0 & = & 27 \end{array}$$

Stap 2 : Vereenvoudig en los vir x op

$$\begin{aligned} 9x &= 27 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

Stap 3 : Vervang die waarde van x terug in enige van die oorspronklike vergelykings en los vir y op

$$\begin{aligned} 3(3) + y &= 2 \\ y &= 2 - 9 \\ \therefore y &= -7 \end{aligned}$$

Stap 4 : Kontroleer dat die oplossing $x = 3$ en $y = -7$ albei die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5 : Skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

Voorbeeld 9: Gelyktydige vergelykings**PROBLEEM**

Los die volgende stel gelyktydige vergelykings op:

$$2a - 3b = 5 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$3a - 2b = 20 \quad \dots\dots\dots (2)$$

OPLOSSING

Stap 1 : Maak die koëffisiënte van enige van die veranderlikes dieselfde in beide vergelykings

As vergelyking (1) met 3 vermenigvuldig word en vergelyking (2) met 2 vermenigvuldig word, sal die koëffisiënte van a in beide vergelykings 6 wees.

$$\begin{array}{rcl} 6a - 9b & = & 15 \\ - (6a - 4b & = & 40) \\ \hline 0 - 5b & = & -25 \end{array}$$

(Wees versigtig met die teken as die een vergelyking van die ander afgetrek word.)

Stap 2 : Vereenvoudig en los vir b op

$$\begin{aligned} b &= \frac{-25}{-5} \\ \therefore b &= 5 \end{aligned}$$

Stap 3 : Vervang die waarde van b terug in enige van die oorspronklike vergelykings in en los vir a op

$$2a - 3(5) = 5$$

$$2a - 15 = 5$$

$$2a = 20$$

$$\therefore a = 10$$

Stap 4 : Toets dat die oplossing $a = 10$ en $b = 5$ beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5 : Skryf die finale antwoord

$$a = 10$$

$$b = 5$$

Grafiese oplossing



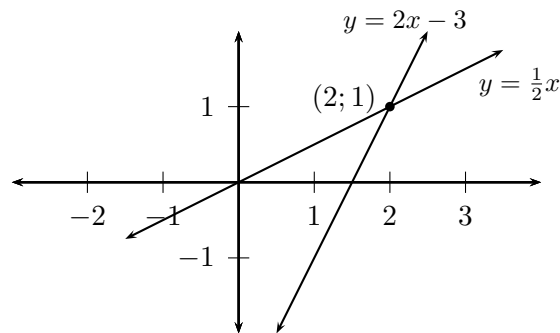
Gelyktydige vergelykings kan ook grafies opgelos word. Die oplossing van die gelyktydige vergelykings word gegee deur die koördinate van die punt waar die twee grafieke mekaar sny.

Byvoorbeeld:

$$x = 2y \dots\dots\dots (1)$$

$$y = 2x - 3 \dots\dots\dots (2)$$

Die grafieke van die twee vergelykings word hieronder gewys.



Die snypunt van die 2 grafieke is $(2; 1)$. Dus is die oplossing van die stel gelyktydige vergelykings $x = 2$ en $y = 1$. Dit kan ook algebraïes gevind word. Stel vergelyking (1) in vergelyking (2) in:

$$\begin{aligned}x &= 2y \\y &= 2(2y) - 3\end{aligned}$$

Los op vir y :

$$\begin{aligned}y - 4y &= -3 \\-3y &= -3 \\\therefore y &= 1\end{aligned}$$

Stel die antwoord vir y terug in vergelyking (1) in:

$$\begin{aligned}x &= 2(1) \\\therefore x &= 2\end{aligned}$$

Let daarop dat beide metodes dieselfde oplossing gee.

Voorbeeld 10: Gelyktydige vergelykings

PROBLEEM

Los die volgende stel gelyktydige vergelykings grafies op:

$$4y + 3x = 100 \dots\dots\dots (1)$$

$$4y - 19x = 12 \dots\dots\dots (2)$$

OPLOSSING

Stap 1 : Skryf albei vergelykings in die vorm $y = mx + c$

$$4y + 3x = 100$$

$$4y = 100 - 3x$$

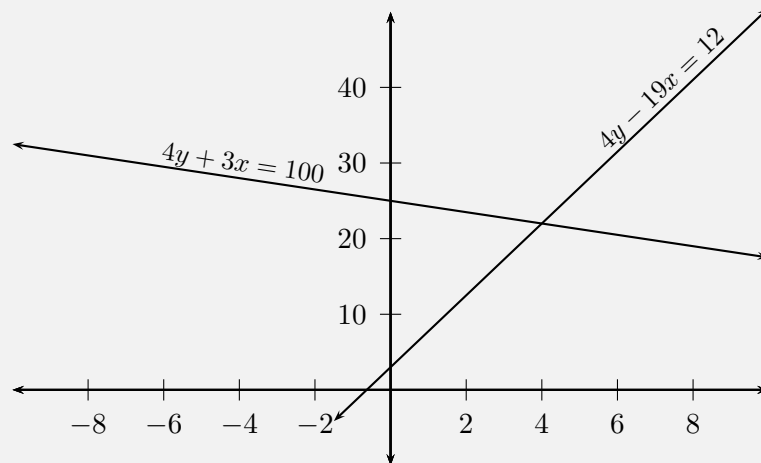
$$y = -\frac{3}{4}x + 25$$

$$4y - 19x = 12$$

$$4y = 19x + 12$$

$$y = \frac{19}{4}x + 3$$

Stap 2 : Skets die grafieke van die 2 vergelykings op dieselfde assestelsel



Stap 3 : Vind die snypunt van die twee grafieke

Die twee grafieke sny by (4; 22).

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

$$x = 4$$

$$y = 22$$

Oefening 2 - 3

1. Los vir x en y op:

(a) $3x - 14y = 0$

$$x - 4y + 1 = 0$$

(b) $x + y = 8$ en $3x + 2y = 21$

(c) $y = 2x + 1$ en $x + 2y + 3 = 0$

(d) $\frac{a}{2} + b = 4$ en $\frac{a}{4} - \frac{b}{4} = 1$

(e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ en $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11$

2. Los grafies op en kontroleer jou antwoord algebraïes:

(a) $x + 2y = 1$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

(b) $5 = x + y$ en $x = y - 2$

(c) $3x - 2y = 0$ en $x - 4y + 1 = 0$

(d) $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} - 1$ en $\frac{y}{4} + \frac{x}{2} = 1$

(e) $2x + y = 5$ en $3x - 2y = 4$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1a-e.) 02tm (2a-e.) 02sx

2.4 Woordprobleme



Om woordprobleme op te los moet ons 'n stelsel vergelykings bepaal wat die probleem wiskundig verteenwoordig. Die oplossing van die vergelykings is dus die oplossing van die probleem.

Strategie vir die oplos van woordprobleme



1. Lees die hele vraag.
2. Bepaal wat gevra word.
3. Gebruik 'n veranderlike (bv. x) om die onbekende getalle/hoeveelhede voor te stel.
4. Herskryf die inligting wat gegee is in terme van die veranderlike. Dus, vertaal die woorde in algebraïese taal.
5. Stel 'n vergelyking of 'n stel gelyktydige vergelykings op om die onbekende te kry.
6. Los die vergelyking algebraïes op om die oplossing te vind.
7. Toets die oplossing.

▶ Video: VMafb by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 11: Oplos van woordprobleme

PROBLEEM

'n Winkel verkoop tweewielfietse en driewiele. In totaal is daar 7 fietse (fietse sluit tweewielfietse en driewiele in) en 19 wiele. Bepaal hoeveel van elke soort fiets daar is.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ken veranderlikes toe aan die onbekendes**

Laat b die aantal tweewielfietse wees
en laat t die aantal driewiele wees.

Stap 2 : **Stel die vergelykings op**

$$b + t = 7 \dots\dots\dots (1)$$

$$2b + 3t = 19 \dots\dots\dots (2)$$

Stap 3 : **Herrangskik vergelyking (1) en stel in vergelyking (2) in**

$$\begin{aligned}t &= 7 - b \\ \therefore 2b + 21 - 3b &= 19 \\ -b &= -2 \\ \therefore b &= 2\end{aligned}$$

Stap 4 : **Bereken die aantal driewiele t**

$$\begin{aligned}t &= 7 - b \\ &= 7 - 2 \\ &= 5\end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

Daar is 5 driewiele en 2 (tweewiel) fietse.

Voorbeeld 12: Oplos van woordprobleme

PROBLEEM

Bongani en Jane is vriende. Bongani vat Jane se fisikatoets en wil nie vir haar sê wat haar punt is nie. Hy weet Jane hou nie baie van wiskunde nie en besluit om haar te terg. Bongani sê 'Ek het 2 punte meer as jy en ons twee saam het 14, wat is ons punte?'

OPLOSSING

Stap 1 : **Ken veranderlikes toe aan die onbekendes**

Ons het twee onbekendes. Bongani se punt en Jane se punt.
Gestel Bongani het b en Jane het j punte.

Stap 2 : **Stel 'n sisteem van vergelykings op**

Bongani het 2 meer as Jane.

$$b = j + 2 \dots\dots\dots (1)$$

Saam het hulle 14 punte.

$$b + j = 14 \dots\dots\dots (2)$$

Stap 3 : Gebruik vergelyking (1) om b uit te druk in terme van j

$$b = j + 2$$

Stap 4 : Vervang in vergelyking (2) in

$$b + j = 14$$

$$(j + 2) + j = 14$$

Stap 5 : Herrangskik en los vir j op

$$2j = 14 - 2$$

$$\therefore 2j = 12$$

$$\therefore j = 6$$

Stap 6 : Vervang die waarde van j terug in vergelyking (1) en los vir b op

$$b = j + 2$$

$$= 6 + 2$$

$$= 8$$

Stap 7 : Kontroleer dat die oplossing beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 8 : Skryf die finale antwoord

Bongani het 8 punte en Jane het 6 punte vir die toets gekry.

Voorbeeld 13: Oplos van woordprobleme**PROBLEEM**

'n Vrugeskommel kos R 2,00 meer as 'n sjokolade melkskommel. As 3 vrugeskommels en 5 sjokolade melkskommels saam R 78,00 kos, bepaal die afsonderlike pryse.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ken veranderlikes toe aan die onbekendes**

Gestel die prys van 'n sjokolade melkskommel is R x
en die prys van 'n vrugeskommel is R y .

Stap 2 : **Stel 'n sisteem van vergelykings op**

$$y = x + 2 \dots\dots\dots (1)$$

$$3y + 5x = 78 \dots\dots\dots (2)$$

Stap 3 : **Vervang vergelyking (1) in die vergelyking (2) in**

$$3(x + 2) + 5x = 78$$

Stap 4 : **Herrangskik en los vir x op**

$$3x + 6 + 5x = 78$$

$$8x = 72$$

$$\therefore x = 9$$

Stap 5 : **Vervang die waarde van x terug in vergelyking (1) in en los vir y op**

$$\begin{aligned}
 y &= x + 2 \\
 &= 9 + 2 \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

Stap 6 : Kontroleer dat die oplossing beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 7 : Skryf die finale antwoord

Een sjokelade melkskommel kos R 9,00 en een vrugteskommel kos R 11,00.

Voorbeeld 14: Oplos van woordprobleme

PROBLEEM

Die produk van twee opeenvolgende negatiewe heelgetalle is 1 122. Vind die twee heelgetalle.

OPLOSSING

Stap 1 : Ken veranderlikes toe aan die onbekendes

Gestel die eerste heelgetal is n
dan is die tweede heelgetal $n + 1$.

Stap 2 : Stel 'n vergelyking op

$$n(n + 1) = 1\,122$$

Stap 3 : Brei uit en los vir n op

$$n^2 + n = 1\,122$$

$$n^2 + n - 1\,122 = 0$$

$$(n + 34)(n - 33) = 0$$

$$\therefore n = -34$$

$$\text{of } n = 33$$

Stap 4 : Bepaal die teken van die heelgetalle

Dit word gegee dat beide heelgetalle negatief moet wees.

$$\therefore n = -34$$

$$n + 1 = -34 + 1$$

$$= -33$$

Stap 5 : Skryf finale antwoord

Die twee opeenvolgende negatiewe heelgetalle is -34 en -33 .

Oefening 2 - 4

1. Twee vliegtuie vlieg na mekaar toe vanaf lughawens 1 200 km van mekaar af. Een vlieg teen 250 km/h en die ander teen 350 km/h. As hulle dieselfde tyd vertrek, hoe lank sal dit hulle neem om by mekaar verby te vlieg?
2. Kadesh het 20 hempde gekoop teen 'n totale bedrag van R 980. As die groot hempde R 50 kos en die klieneres R 40 kos, hoeveel van elke grootte het hy gekoop?
3. Die diagonaal van 'n reghoek is 25 cm meer as die wydte. Die lengte van die reghoek is 17 cm meer as die wydte. Wat is die afmetings van die reghoek?
4. Die som van 27 en 12 is 73 meer as 'n onbekende getal. Vind die onbekende getal.
5. Die twee kleiner hoeke van 'n reghoekige driehoek is in die verhouding 1 : 2. Wat is die groottes van die twee hoeke?
6. Die lengte van 'n reghoek is tweemaal die breedte. As die oppervlakte 128 cm² is, bepaal die lengte en breedte.
7. As 4 keer 'n getal met 6 vermeerder word, is die resultaat 15 minder as die vierkant (kwadraat) van die getal. Vind die getal wat hierdie stelling bevredig deur 'n vergelyking op te stel en dan op te los.

8. Die lengte van 'n reghoek is 2 cm meer as die wydte. Die omtrek van die reghoek is 20 cm. Vind die lengte en breedte van die reghoek.
9. Stefan het 1 l liter van 'n mengsel wat 69% sout bevat. Hoeveel water moet Vian bygooi om die mengsel 50% sout te maak? Skryf jou antwoord as 'n breukdeel van 'n liter.
10. Die som van twee opeenvolgende onewe getalle is 20 en hulle verskil is 2. Vind die twee getalle.
11. Die noemer van 'n breuk is 1 meer as die teller. Die som van die breuk en sy omgekeerde is $\frac{5}{2}$. Vind die breuk.
12. Masindi is 21 jaar ouer as haar dogter, Mulivhu. Die som van hulle ouderdomme is 37. Hoe oud is Mulivhu?
13. Tshamano is nou vyf keer so oud soos sy seun Murunwa. Sewe jaar van nou af sal Tshamano drie keer so oud soos sy seun wees. Vind hulle huidige ouderdomme.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02k3 (2.) 02k4 (3.) 02k5 (4.) 02k6 (5.) 02k7 (6.) 02k8

(7.) 02k9 (8.) 02ka (9.) 02kb (10.) 02sy (11.) 02sz (12.) 02t0

(13.) 02t1

2.5 Lettervergelikings



'n Vergelyking met letterkoëffisiënte is een wat verskeie letters of veranderlikes bevat. Voorbeelde sluit die area van 'n sirkel ($A = \pi r^2$) in en die formule vir die berekening van spoed ($s = \frac{d}{t}$). In hierdie afdeling sal ons leer hoe om vergelykings met letterkoëffisiënte op te los in terme van een van die veranderlikes. Om dit te doen, gebruik ons die beginsels wat ons van vergelykings geleer het en pas hulle toe om lettervergelikings op te los. Die oplossing van lettervergelikings staan ook bekend as “die verandering van die onderwerp van die vergelyking”. Wanneer jy lettervergelikings oplos, behoort jy die volgende in gedagte te hou:

- Ons isoleer die onbekende deur te vra wat daaraan verbind is en hoe dit daaraan verbind is en dan doen ons die teenoorgestelde bewerking (aan beide kante as 'n geheel).
- As die onbekende veranderlike in twee of meer terme voorkom, haal ons dit uit as

'n gemeenskaplike faktor.

- As ons weerskante die vierkantswortel moet neem, onthou dat daar 'n positiewe sowel as 'n negatiewe antwoord mag wees.
- As die onbekende veranderlike in die noemer is, dan vind ons die kleinste gemene noemer (KGN), vermenigvuldig weerskante met die KGN en gaan dan voort om die probleem op te los.

▶ Video: VMajx by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 15: Oplos van 'n lettervergelyking**PROBLEEM**

Die area van 'n driehoek is $A = \frac{1}{2}bh$. Wat is die hoogte van die driehoek in terme van die basis en area?

OPLOSSING**Stap 1 : Isoleer die verlangde veranderlike**

Ons herrangskik die vergelyking sodat die h aan die een kant van die gelykaanteken is en die res van die veranderlikes aan die ander kant van die gelykaanteken.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$2A = bh$$

$$\frac{2A}{b} = h$$

Stap 2 : Skryf die finale antwoord

Die hoogte van 'n driehoek word gegee deur: $h = \frac{2A}{b}$

Voorbeeld 16: Oplos van lettervergelyking**PROBLEEM**

Gegee die formule $h = R \times \frac{H}{R + r^2}$, los op vir R .

OPLOSSING

Stap 1 : **Kry R alleen aan die een kant van die vergelykings**

$$h(R + r^2) = R \times H$$

$$hR + hr^2 = HR$$

$$hr^2 = HR - hR$$

$$hr^2 = R(H - h)$$

$$\therefore R = \frac{hr^2}{H - h}$$

Oefening 2 - 5

1. Maak a die onderwerp van die vergelyking: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$
2. Los vir n op: $pV = nRT$
3. Maak x die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{b} + \frac{2b}{x} = 2$
4. Los vir r op: $V = \pi r^2 h$
5. Los vir h op: $E = \frac{hc}{\lambda}$
6. Los vir h op: $A = 2\pi r h + 2\pi r$
7. Maak λ die onderwerp van die vergelyking: $t = \frac{D}{f\lambda}$
8. Los vir m op: $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$

9. Los vir x op: $x^2 + x(a + b) + ab = 0$
10. Los vir b op: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
11. Maak u die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{w}$
12. Los vir r op: $A = \pi R^2 - \pi r^2$
13. $F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$ is die formule wat temperatuur in grade Celsius omskakel na grade Fahrenheit. Lei 'n formule af om Fahrenheit na Celsius om te skakel.
14. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ is die formule wat die volume van 'n sokkerbal beskryf. Gee die radius in terme van die volume.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1-3.) 02tn (4-8.) 02t2 (9.-14.) 02t3

2.6 Lineêre ongelykhede



'n Lineêre ongelykheid is soortgelyk aan 'n lineêre vergelyking aangesien die hoogste eksponent van die veranderlike 1 is. Die volgende is voorbeelde van lineêre ongelykhede.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &\leq 1 \\ \frac{2 - x}{3x + 1} &\geq 2 \\ \frac{4}{3}x - 6 &< 7x + 2 \end{aligned}$$

Die metodes wat gebruik word om lineêre ongelykhede op te los, is soortgelyk aan dié wat gebruik word om lineêre vergelykings op te los. Die enigste verskil kom voor wanneer daar vermenigvuldiging met of deling deur 'n negatiewe getal is. Ons weet byvoorbeeld dat $8 > 6$. As beide kante van die ongelykheid gedeel word deur -2 , kry ons $-4 > -3$ wat nie waar is nie. Dus moet die ongelykheid omkeer, want $-4 < -3$. Byvoorbeeld, as $x < 1$, dan $-x > -1$.

Om 'n ongelykheid met behulp van 'n gewone vergelyking op te los, sal ons eers die gewone vergelyking oplos.

Los op $2x + 2 = 1$:

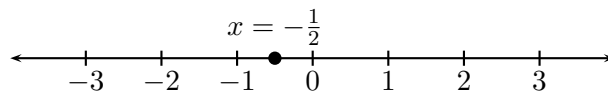
$$2x + 2 = 1$$

$$2x = 1 - 2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

As ons hierdie antwoord op 'n getallelyn voorstel, kry ons:



Kom ons los nou die ongelijkheid $2x + 2 \leq 1$ op:

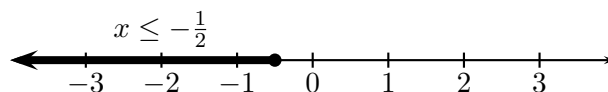
$$2x + 2 \leq 1$$

$$2x \leq 1 - 2$$

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

As ons hierdie antwoord op 'n getallelyn voorstel, kry ons:



Ons sien, vir die vergelyking is daar slegs 'n enkele waarde van x waarvoor die vergelyking waar is. Vir die ongelijkheid is daar egter 'n hele versameling waardes waarvoor die ongelijkheid waar is. Dit is die groot verskil tussen gewone vergelykings (gelykhede) en ongelikhede.

Onthou: Wanneer beide kante van 'n ongelijkheid met 'n negatiewe getal vermenigvuldig of gedeel word, verander die rigting van die ongelijkheid. Om hierdie rede mag ons nie met 'n veranderlike vermenigvuldig as ons nie weet nie wat die onbekende (veranderlike) se teken is nie.

► Video: VMakv by www.everythingmaths.co.za

Intervalnotasie



Voorbeelde:

$(4; 12)$	Ronde hakies dui aan dat die getal nie ingesluit is nie. Hierdie interval sluit alle reële getalle groter as, maar nie gelyk aan 4 nie en minder as maar nie gelyk aan 12 nie, in.
$(-\infty; -1)$	Ronde hakies word altyd gebruik vir positiewe en negatiewe oneindigheid. Hierdie interval sluit alle reële getalle minder as, maar nie gelyk aan -1 nie, in.
$[1; 13)$	'n Vierkantige hakie dui aan dat die getal ingesluit is. Hierdie interval sluit alle reële getalle groter as of gelyk aan 1 en minder as maar nie gelyk aan 13 nie, in.

Dit is belangrik om op te let dat hierdie notasie kan slegs gebruik word om 'n interval van reële getalle voor te stel.

Ons stel die bogenoemde antwoord in intervalnotasie voor as $(-\infty; -\frac{1}{2}]$.

Voorbeeld 17: Los lineêre ongelykhede op

PROBLEEM

Los vir r op: $6 - r > 2$.

Stel jou antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

OPLOSSING

Stap 1 : **Herrangskik en los vir r op**

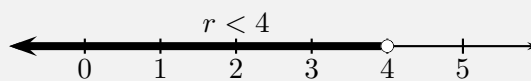
$$-r > 2 - 6$$

$$-r > -4$$

Stap 2 : Vermenigvuldig met -1 en draai die rigting van die ongelykheid om

$$r < 4$$

Stap 3 : Stel die oplossing voor op 'n getallelyn



Stap 4 : Druk die antwoord uit in intervalnotasie

$$(-\infty ; 4)$$

Voorbeeld 18: Los lineêre ongelykhede op

PROBLEEM

Los vir q op: $4q + 3 < 2(q + 3)$.
Stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

OPLOSSING

Stap 1 : Brei die hakies uit

$$4q + 3 < 2(q + 3)$$

$$4q + 3 < 2q + 6$$

Stap 2 : Herrangskik en los vir q op

$$4q + 3 < 2q + 6$$

$$4q - 2q < 6 - 3$$

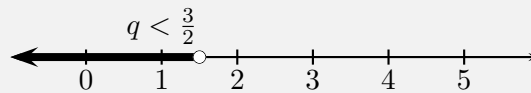
$$2q < 3$$

Stap 3 : **Deel beide kante deur 2**

$$2q < 3$$

$$q < \frac{3}{2}$$

Stap 4 : **Stel die oplossing voor op 'n getallelyn**



Stap 5 : **Druk die antwoord uit in intervalnotasie**

$$\left(-\infty ; \frac{3}{2}\right)$$

Voorbeeld 19: Los saamgestelde lineêre ongelykhede op

PROBLEEM

Los vir x op: $5 \leq x + 3 < 8$.

Stel die oplossing voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

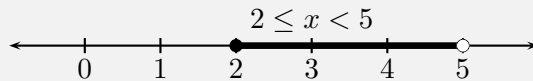
OPLOSSING

Stap 1 : **Trek 3 van alle terme af**

$$5 - 3 \leq x + 3 - 3 < 8 - 3$$

$$2 \leq x < 5$$

Stap 2 : **Stel die oplossing voor op 'n getallelyn**



Stap 3 : **Druk antwoord uit in intervalnotasie**

$$[2 ; 5)$$

Oefening 2 - 6

Los vir x op en stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie:

1. $3x + 4 > 5x + 8$

2. $3(x - 1) - 2 \leq 6x + 4$

3. $\frac{x - 7}{3} > \frac{2x - 3}{2}$

4. $-4(x - 1) < x + 2$

5. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x - 1) \geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

6. $-2 \leq x - 1 < 3$

7. $-5 < 2x - 3 \leq 7$

8. $7(3x + 2) - 5(2x - 3) > 7$

9. $\frac{5x - 1}{-6} \leq \frac{1 - 2x}{3}$

10. $3 \leq 4 - x \leq 16$

11. $\frac{-7y}{3} - 5 > -7$

12. $1 \leq 1 - 2y < 9$

13. $-2 < \frac{x-1}{-3} < 7$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02tp (2.) 02tq (3.) 02tr (4.) 02ts (5.) 02tt (6.) 02tu
(7.) 02tv (8.) 02t4 (9.) 02t5 (10.) 02t6 (11.) 02t7 (12.) 02t8
(13.) 02t9

Hoofstuk 2 | Opsomming

 Opsommingsaanbieding: M0001 by www.everythingmaths.co.za

- 'n Lineêre vergelyking is 'n vergelyking waar die hoogste mag van die veranderlike 1 is. 'n Lineêre vergelyking het op die meeste een oplossing.
- 'n Kwadratiese vergelyking is 'n vergelyking waar die hoogste mag van die veranderlike 2 is. 'n Kwadratiese vergelyking het op die meeste 2 oplossings.
- 'n Lineêre ongelykheid is soortgelyk aan 'n lineêre vergelyking en met die hoogste mag van die veranderlike gelyk aan 1.
- Wanneer jy weerskante van 'n ongelykheid deel of vermenigvuldig met 'n negatiewe getal, draai die rigting van die ongelykheid om.
- Wanneer twee onbekende veranderlikes opgelos moet word, moet jy twee vergelykings gebruik en hierdie vergelykings staan bekend as gelyktydige vergelykings. Daar is twee maniere waarop jy gelyktydige lineêre vergelykings kan oplos: grafies en algebraïes. Om die vergelykings grafies op te los, trek jy 'n grafiek van elke vergelyking en die oplossing sal die koördinate van die snypunt van die grafieke wees. Om die oplossing algebraïes te vind, los jy een vergelyking op vir een veranderlike en stel dan daardie oplossing in die ander vergelyking in om die tweede veranderlike se waarde te vind.
- Lettervergeljings is vergelykings waar jy verskeie letters (veranderlikes) het en jy herrangskik die vergelyking om die oplossing te vind in terme van een van die letters (veranderlikes)
- Woordprobleme is waar ons 'n vergelyking of 'n stel vergelykings opstel om 'n probleem wiskundig voor te stel. Die oplossing van die vergelykings gee dan die oplossing van die probleem.

1. Los op:

(a) $2(p - 1) = 3(p + 2)$

(j) $y^2 + y = 6$

(b) $3 - 6k = 2k - 1$

(k) $0 = 2x^2 - 5x - 18$

(c) $m + 6(-m + 1) + 5m = 0$

(l) $(d + 4)(d - 3) - d$
 $= (3d - 2)^2 - 8d(d - 1)$

(d) $2k + 3 = 2 - 3(k + 3)$

(m) $5x + 2 \leq 4(2x - 1)$

(e) $5t - 1 = t^2 - (t + 2)(t - 2)$

(f) $3 + \frac{q}{5} = \frac{q}{2}$

(n) $\frac{4x - 2}{6} > 2x + 1$

(g) $5 - \frac{2(m + 4)}{m} = \frac{7}{m}$

(o) $\frac{x}{3} - 14 > 14 - \frac{x}{7}$

(h) $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{t} \right)$

(p) $\frac{1 - a}{2} - \frac{2 - a}{3} \geq 1$

(i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(q) $-5 \leq 2k + 1 < 5$

(r) $x - 1 = \frac{42}{x}$

2. Beskou die volgende lettervergelykings:

(a) Los vir I op: $P = VI$

(b) Maak m die onderwerp van die vergelyking: $E = mc^2$

(c) Los vir t op: $v = u + at$

(d) Maak f die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$

(e) Maak C die onderwerp van die vergelyking: $F = \frac{9}{5}C + 32$

(f) Los vir y op: $m = \frac{y - c}{x}$

3. Los die volgende stelsels gelyktydige vergelykings algebraïes en grafies op:

(a) $7x + 3y = 13$

$2x - 3y = -4$

(b) $10 = 2x + y$

$y = x - 2$

(c) $7x - 41 = 3y$

$17 = 3x - y$

(d) $2y = x + 8$

$4y = 2x - 44$

4. Vind die oplossings van die volgende probleme:

(a) $\frac{7}{8}$ van 'n getal is 5 meer as $\frac{1}{3}$ van die getal. Vind die getal.

- (b) Drie liniale en twee penne kos saam R 21,00. Een liniaal en een pen kos saam R 8,00. Hoeveel kos 'n pen op sy eie en hoeveel kos 'n liniaal op sy eie?
- (c) 'n Man hardloop na die busstop en terug in 15 minutes. Sy spoed na die busstop is 5 km/h en sy spoed terug is 4 km/h. Wat is die afstand na die busstop?
- (d) Zanele en Piet rolskaats na mekaar toe op 'n reguit pad. Hulle begin 20 km van mekaar af. Zanele skaats teen 15 km/h en Piet teen 10 km/h. Hoe ver sal Piet skaats voor dat hulle by mekaar uitkom?
- (e) As die prys van sjokolade met R 10 verhoog word, kan ons 5 minder sjokolades koop vir R 300. Wat was die prys van sjokolade voor die prys-verhoging?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1a-f.) 02tw (1g-l.) 02tx (1m-r.) 02ty (2a-f.) 02tz (3a-d.) 02u0 (4a-e.) 02ta

Eksponensiaalnotasie is 'n kort manier om te skryf dat 'n getal meermale met homself vermenigvuldig word. Laat ons beter definieer hoe om eksponensiaalnotasie te gebruik.

grondtal $\longleftarrow a^n \longrightarrow$ eksponent/indeks

Vir enige reële getal a en natuurlike getal n , kan ons a wat n keer vermenigvuldig word met homself skryf as a^n .

1. $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (n keer) ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)
2. $a^0 = 1$ ($a \neq 0$ want 0^0 is ongedefinieer)
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$ want $\frac{1}{0}$ is ongedefinieer)

Voorbeelde:

1. $3 \times 3 = 3^2$
2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$
3. $p \times p \times p = p^3$
4. $(3^x)^0 = 1$
5. $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
6. $\frac{1}{5^{-x}} = 5^x$

Nota: Ons skryf altyd die finale antwoord met positiewe eksponente.

📺 Video: VMald by www.everythingmaths.co.za

3.1 Eksponentwette

Daar is 'n aantal eksponentwette wat ons kan gebruik om getalle met eksponente te vereenvoudig. Sommige van hierdie wette het ons reeds in vorige grade teëgekom, maar

hier is die volledige lys:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

waar $a > 0, b > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 1: Toepassing van eksponentwette

PROBLEEM

Vereenvoudig:

1. $2^{3x} \times 2^{4x}$

2. $\frac{12p^2t^5}{3pt^3}$

3. $(3x)^2$

4. $(3^45^2)^3$

OPLOSSING

1. $2^{3x} \times 2^{4x} = 2^{3x+4x} = 2^{7x}$

2. $\frac{12p^2t^5}{3pt^3} = 4p^{(2-1)}t^{(5-3)} = 4pt^2$

3. $(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$

4. $(3^4 \times 5^2)^3 = 3^{(4 \times 3)} \times 5^{(2 \times 3)} = 3^{12} \times 5^6$

Voorbeeld 2: *EkspONENTUITDRUKKINGS***PROBLEEM**

Vereenvoudig: $\frac{2^{2n} \times 4^n \times 2}{16^n}$

OPLOSSING

Stap 1 : Verander grondtalle na priemgetalle

$$\frac{2^{2n} \times 4^n \times 2}{16^n} = \frac{2^{2n} \times (2^2)^n \times 2^1}{(2^4)^n}$$

Stap 2 : Vereenvoudig die eksponente

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{2n} \times 2^{2n} \times 2^1}{2^{4n}} \\ &= \frac{2^{2n+2n+1}}{2^{4n}} \\ &= \frac{2^{4n+1}}{2^{4n}} \\ &= 2^{4n+1-(4n)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3: Ekspontuitdrukings**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $\frac{5^{2x-1}9^{x-2}}{15^{2x-3}}$

OPLOSSING

Stap 1 : **Verander grondgetalle na priemgetalle**

$$\begin{aligned}\frac{5^{2x-1}9^{x-2}}{15^{2x-3}} &= \frac{5^{2x-1}(3^2)^{x-2}}{(5 \times 3)^{2x-3}} \\ &= \frac{5^{2x-1}3^{2x-4}}{5^{2x-3}3^{2x-3}}\end{aligned}$$

Stap 2 : **Trek eksponente af (dieselfde grondtal)**

$$\begin{aligned}&= 5^{(2x-1)-(2x-3)} \times 3^{(2x-4)-(2x-3)} \\ &= 5^{2x-1-2x+3} \times 3^{2x-4-2x+3} \\ &= 5^2 \times 3^{-1}\end{aligned}$$

Stap 3 : **Skryf die antwoord as 'n breuk**

$$\begin{aligned}&= \frac{25}{3} \\ &= 8\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Nota: Wanneer ons met eksponentuitdrukings werk, geld al die reëls vir algebraïese bewerkings nog steeds.

Voorbeeld 4: Vereenvoudig deur die uithaal van 'n gemene faktor

PROBLEEM

Vereenvoudig: $\frac{2^t - 2^{t-2}}{3 \times 2^t - 2^t}$

OPLOSSING

Stap 1 : **Vereenvoudig tot 'n faktoriseerbare vorm**

$$\frac{2^t - 2^{t-2}}{3 \times 2^t - 2^t} = \frac{2^t - (2^t \times 2^{-2})}{3 \times 2^t - 2^t}$$

Stap 2 : **Haal die gemeenskaplike faktor uit**

$$= \frac{2^t(1 - 2^{-2})}{2^t(3 - 1)}$$

Stap 3 : **Kanselleer die gemeenskaplike faktor en vereenvoudig**

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Voorbeeld 5: Vereenvoudig met die gebruik van die verskil van twee kwadrate

PROBLEEM

Vereenvoudig: $\frac{9^x - 1}{3^x + 1}$

OPLOSSING

Stap 1 : **Verander grondtalle na priemgetalle**

$$\begin{aligned}\frac{9^x - 1}{3^x + 1} &= \frac{(3^2)^x - 1}{3^x + 1} \\ &= \frac{(3^x)^2 - 1}{3^x + 1}\end{aligned}$$

Stap 2 : **Faktoriseer deur die verskil van twee vierkante te gebruik**

$$= \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{3^x + 1}$$

Stap 3 : **Vereenvoudig**

$$= 3^x - 1$$

Oefening 3 - 1

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

- | | |
|--|---|
| <p>1. 16^0</p> <p>2. $16a^0$</p> <p>3. $\frac{2^{-2}}{3^2}$</p> <p>4. $\frac{5}{2^{-3}}$</p> <p>5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$</p> <p>6. x^2x^{3t+1}</p> | <p>7. $3 \times 3^{2a} \times 3^2$</p> <p>8. $\frac{a^{3x}}{a^x}$</p> <p>9. $\frac{32p^2}{4p^8}$</p> <p>10. $(2t^4)^3$</p> <p>11. $(3^{n+3})^2$</p> <p>12. $\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$</p> |
|--|---|

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.-12.) 02kc

3.2 Rasionale eksponente



Ons kan ook die eksponentwette toepas op uitdrukkings met rasionale eksponente.

 Video: VMaIn by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 6: Vereenvoudig rationale eksponente**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $2x^{\frac{1}{2}} \times 4x^{-\frac{1}{2}}$

OPLOSSING

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{1}{2}} \times 4x^{-\frac{1}{2}} &= 8x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= 8x^0 \\ &= 8(1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Voorbeeld 7: Vereenvoudig rationale eksponente**PROBLEEM**

Vereenvoudig: $(0,008)^{\frac{1}{3}}$

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf as 'n breuk en verander grondtalle na priemgetalle**

$$\begin{aligned} 0,008 &= \frac{8}{1\,000} \\ &= \frac{2^3}{10^3} \\ &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Dus**

$$\begin{aligned}(0,008)^{\frac{1}{3}} &= \left[\left(\frac{2}{10} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Oefening 3 - 2

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1. $t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}}$

2. $\frac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}}$

3. $(0,25)^{\frac{1}{2}}$

4. $(27)^{-\frac{1}{3}}$

5. $(3p^2)^{\frac{1}{2}} \times (3p^4)^{\frac{1}{2}}$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.-5.) 02kd

3.3 Eksponentvergelykings



Eksponentvergelykings het die onbekende veranderlike in die eksponent. Hier is voorbeeld:

$$\begin{aligned}3^{x+1} &= 9 \\ 5^t + 3 \cdot 5^{t-1} &= 400\end{aligned}$$

Om eksponentvergelykings op te los, moet ons die eksponentwette toepas. Dit beteken dat as ons weerskante van die gelykaanteken 'n enkele term het met dieselfde grondtal,

kan ons die eksponente gelykstel.

Nota: Indien $a > 0$ en $a \neq 0$ en

$$a^x = a^y$$

dan sal $x = y$ (dieselfde grondtal)

Indien $a = 1$, dan kan x en y verskil.

Voorbeeld 8: Stel eksponente gelyk

PROBLEEM

Los op vir x : $3^{x+1} = 9$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Verander grondtalle na priemgetalle**

$$3^{x+1} = 3^2$$

Stap 2 : **Grondtalle is dieselfde, dus kan ons eksponente gelykstel**

$$x + 1 = 2$$

$$\therefore x = 1$$

Nota: Om eksponentvergelykings op te los, gebruik ons al die prosedures vir oplos van lineêre en kwadratiese vergelykings.

Voorbeeld 9: Oplos van vergelykings deur die uithaal van 'n gemene faktor

PROBLEEM

Los op vir t : $5^t + 3 \times 5^{t+1} = 400$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Herskryf die vergelyking**

$$5^t + 3(5^t \times 5) = 400$$

Stap 2 : **Haal 'n gemeenskaplike faktor uit**

$$5^t(1 + 15) = 400$$

Stap 3 : **Vereenvoudig**

$$5^t(16) = 400$$

$$5^t = 25$$

Stap 4 : **Verander grondtalle na priemgetalle**

$$5^t = 5^2$$

Stap 5 : **Grondtalle is dieselfde, dus kan ons eksponente gelykstel**

$$\therefore t = 2$$

Voorbeeld 10: Oplos van vergelykings deur die faktorisering van 'n kwadratiese drieterm

PROBLEEM

Los op: $p - 13p^{\frac{1}{2}} + 36 = 0$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Let op dat** $(p^{\frac{1}{2}})^2 = p$ **so ons kan die vergelyking herskryf as**

$$(p^{\frac{1}{2}})^2 - 13p^{\frac{1}{2}} + 36 = 0$$

Stap 2 : **Faktoriseer as 'n drieterm**

$$(p^{\frac{1}{2}} - 9)(p^{\frac{1}{2}} - 4) = 0$$

Stap 3 : **Los op om beide wortels te vind**

$$p^{\frac{1}{2}} - 9 = 0$$

$$p^{\frac{1}{2}} = 9$$

$$(p^{\frac{1}{2}})^2 = (9)^2$$

$$p = 81$$

$$p^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$p^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$(p^{\frac{1}{2}})^2 = (4)^2$$

$$p = 16$$

$$\therefore p = 81 \text{ of } p = 16.$$

Oefening 3 - 3

1. Los op:

(a) $2^{x+5} = 32$

(b) $5^{2x+2} = \frac{1}{125}$

(c) $64^{y+1} = 16^{2y+5}$

(d) $3^{9x-2} = 27$

(e) $81^{k+2} = 27^{k+4}$

(f) $25^{(1-2x)} - 5^4 = 0$

(g) $27^x \times 9^{x-2} = 1$

(h) $2^t + 2^{t+2} = 40$

(i) $2 \times 5^{2-x} = 5 + 5^x$

(j) $9^m + 3^{3-2m} = 28$

(k) $y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$

(l) $4^{x+3} = 0,5$

(m) $2^a = 0,125$

(n) $10^x = 0,001$

(o) $2^{x^2-2x-3} = 1$

2. Die groei van alge kan gemodelleer word met die funksie $f(t) = 2^t$. Vind die waarde van t as $f(t) = 128$.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1a-m.) 02ke (2.) 02kf

Hoofstuk 3 | Opsomming

 Opsommingsaanbieding: VMdgh by www.everythingmaths.co.za

- Eksponensiaalnotasie verwys na 'n getal wat geskryf word as a^n waar n 'n heelgetal is en a enige reële getal is.
- a is die *grondtal* en n is die *eksponent* of *indeks*.
- Definisie:
 - $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (n kere)
 - $a^0 = 1, a \neq 0$
 - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
- Die eksponentwette:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

Hoofstuk 3

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Vereenvoudig:

- | | |
|---|--|
| (a) $t^3 \times 2t^0$ | (k) $\frac{2^{3x-1}8^{x+1}}{4^{2x-2}}$ |
| (b) $5^{2x+y}5^{3(x+z)}$ | (l) $\frac{6^{2x}11^{2x}}{2^{2x-1}3^{2x}}$ |
| (c) $(b^{k+1})^k$ | (m) $\frac{(-3)^{-3}(-3)^2}{(-3)^{-4}}$ |
| (d) $\frac{6^{5p}}{9^p}$ | (n) $(3^{-1} + 2^{-1})^{-1}$ |
| (e) $m^{-2t} \times (3m^t)^3$ | (o) $\frac{9^{n-1}27^{3-2n}}{81^{2-n}}$ |
| (f) $\frac{3x^{-3}}{(3x)^2}$ | (p) $\frac{2^{3n+2}8^{n-3}}{4^{3n-2}}$ |
| (g) $\frac{5^{b-3}}{5^{b+1}}$ | (q) $\frac{3^{t+3} + 3^t}{2 \times 3^t}$ |
| (h) $\frac{2^{a-2}3^{a+3}}{6^a}$ | (r) $\frac{2^{3p} + 1}{2^p + 1}$ |
| (i) $\frac{3^n9^{n-3}}{27^{n-1}}$ | |
| (j) $\left(\frac{2x^{2a}}{y^{-b}}\right)^3$ | |

2. Los op:

- | | |
|-----------------------------|---|
| (a) $3^x = \frac{1}{27}$ | (g) $16x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$ |
| (b) $5^{t-1} = 1$ | (h) $m^0 + m^{-1} = 0$ |
| (c) $2 \times 7^{3x} = 98$ | (i) $t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$ |
| (d) $2^{m+1} = (0,5)^{m-2}$ | (j) $3^p + 3^p + 3^p = 27$ |
| (e) $3^{y+1} = 5^{y+1}$ | (k) $k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 = 0$ |
| (f) $z^{\frac{3}{2}} = 64$ | (l) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 18 = 0$ |

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02kg (2.) 02kh

In vorige jare het jy patrone gesien in die vorm van prentjies en getalle. In hierde hoofstuk sal ons meer leer van die wiskunde van patrone. Patrone is herkenbaar as herhalende reekse wat gevind kan word in die natuur, vorms, gebeure, groepe van getalle en op baie ander plekke in ons daaglikse lewe. Patrone kan byvoorbeeld gevind word in die sade van sonneblomme, sneeuvlokkies, geometriese patrone op lappieskomberse en teëls en reekse getalle soos 0; 4; 8; 12; 16; ...

Kyk of jy enige patrone in die volgende reekse kan vind:

1. 2; 4; 6; 8; 10; ...
2. 1; 2; 4; 7; 11; ...
3. 1; 4; 9; 16; 25; ...
4. 5; 10; 20; 40; 80; ...

▶ Video: VMcyv by www.everythingmaths.co.za

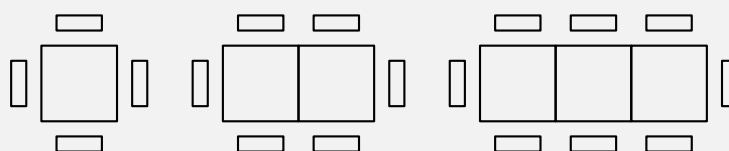
Reekse van getalle kan interessante patrone bevat. Die volgende is 'n lys van die mees algemene tipes getalpatrone en hoe hulle gevorm word. Voorbeelde:

1. 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; ...
Hierdie reeks het 'n verskil van 3 tussen al die getalle.
Die patroon word gevorm deur elke keer 3 by te tel by die vorige getal.
2. 3; 8; 13; 18; 23; 28; 33; 38; ...
Hierdie reeks het 'n verskil van 5 tussen al die getalle.
Die patroon word gevorm deur elke keer 5 by te tel by die vorige getal.
3. 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; ...
Hierdie reeks het 'n faktor van 2 tussen al die getalle.
Die volgende getal in die reeks word gevorm deur die vorige een met 2 te vermenigvuldig.
4. 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; ...
Hierdie reeks het 'n faktor van 3 tussen al die getalle.
Die volgende getal in die reeks word gevorm deur die vorige een met 3 te vermenigvuldig.

Voorbeeld 1: Studeertafels**PROBLEEM**

Gestel jy en 3 vriende besluit om te studeer vir wiskunde, en dat julle om 'n vierkantige tafel sit. 'n Paar minute later sluit 2 ander vriende by julle aan en hulle wil kom sit. Om sitplek te kry vir hulle, besluit julle om 'n tafel langs julle tafel te sit sodat daar genoeg sitplek is vir die 6 van julle. Daarna besluit nog 2 van jou vriende om by julle aan te sluit en julle skuif 'n derde tafel sodat daar genoeg plek is vir 8 van julle.

Ondersoek hoe die aantal mense om die tafels verband hou met die aantal tafels. Is daar 'n patroon?



Twee ekstra mense kan sit vir elke tafel wat hulle bysit.

OPLOSSING

Stap 1 : **Maak 'n tabel en kyk of 'n patroon sigbaar word**

Aantal tafels, n	Aantal mense wat sitplek het
1	$4 = 4$
2	$4 + 2 = 6$
3	$4 + 2 + 2 = 8$
4	$4 + 2 + 2 + 2 = 10$
$\vdots$	$\vdots$
n	$4 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2$

Stap 2 : **Beskryf die patroon**

Ons kan sien met 3 tafels is daar plek vir 8 mense, met 4 tafels is daar plek vir 10 mense ens. Ons begin met 4 mense en voeg elke

keer 2 by. So, vir elke tafel wat bygevoeg word, is daar sitplek vir nog 2 mense.

4.1 Beskryf reekse



Ons gebruik die volgende notasie om die terme in 'n getalpatroon aan te dui:

Die 1^{ste} term van 'n reeks is T_1 .

Die 4^{de} term van 'n reeks is T_4 .

Die 10^{de} term van 'n reeks is T_{10} .

Die algemene term word dikwels uitgedruk as die n^{de} term en word geskryf as T_n .

'n Reeks hoef nie 'n patroon te volg nie, maar wanneer dit wel 'n patroon het, kan ons dit gewoonlik met 'n formule beskryf om die n^{de} - term, T_n , te bereken. Byvoorbeeld, beskou die volgende lineêre reeks:

$$1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

Die n^{de} term word gegee deur die formule

$$T_n = 2n - 1$$

Jy kan dit kontroleer deur waardes in die formule in te stel:

$$T_1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$T_2 = 2(2) - 1 = 3$$

$$T_3 = 2(3) - 1 = 5$$

$$T_4 = 2(4) - 1 = 7$$

$$T_5 = 2(5) - 1 = 9$$

As ons die verband tussen die posisie van 'n term (plek in die ry) en die waarde van die term vasgestel het, kan ons die patroon beskryf en enige term in die ry vind.

▶ Video: MG10025 by www.everythingmaths.co.za

Konstante verskil



Ons kan 'n gemeenskaplike verskil tussen die terme bepaal vir sekere patrone. Dit word genoem die *konstante verskil*.

DEFINISIE: Konstante verskil

Die konstante verskil is die verskil tussen opeenvolgende terme en word aangedui met die letter d .

Byvoorbeeld, beskou die reeks 10; 7; 4; 1; ...

Om die gemeenskaplike verskil te vind, trek ons die betrokke term af van die volgende term:

$$\begin{aligned}d &= T_2 - T_1 \\&= 7 - 10 \\&= -3\end{aligned}$$

Toets enige ander twee opeenvolgende terme:

$$\begin{aligned}d &= T_4 - T_3 \\&= 1 - 4 \\&= -3\end{aligned}$$

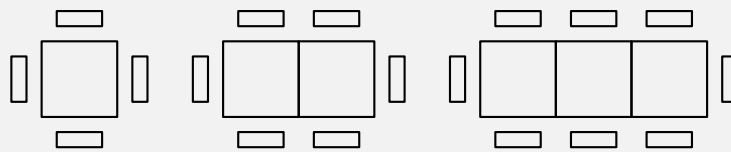
Ons sien dat d konstant is.

Let wel: $d = T_2 - T_1$, nie $T_1 - T_2$ nie.

Voorbeeld 2: Studeertafel voortgesit...**PROBLEEM**

Soos voorheen, studeer jy en 3 vriende wiskunde, en julle sit rondom 'n vierkantige tafel. 'n Paar minute later besluit 2 ander vriende om by julle aan te sluit en julle sit 'n ekstra tafel by sodat al 6 van julle kan sit. Weereens besluit nog 2 van jou vriende om by julle aan te sluit en julle skuif 'n derde tafel sodat daar genoeg plek is vir 8 van julle soos in die skets.

1. Vind 'n wiskundige uitdrukking vir die aantal mense wat om n tafels kan sit.
2. Gebruik dan die algemene formule om te bepaal hoeveel mense om 12 tafels kan sit.
3. Hoeveel tafels is nodig is sodat 20 mense kan sit?

OPLOSSING

Twee ekstra mense kan sit vir elke tafel wat hulle bysit

Stap 1 : **Stel 'n tabel op om die patroon te sien**

Aantal tafels, n	Aantal mense wat kan sit	Formule
1	$4 = 4$	$= 4 + 2(0)$
2	$4 + 2 = 6$	$= 4 + 2t(1)$
3	$4 + 2 + 2 = 8$	$= 4 + 2(2)$
4	$4 + 2 + 2 + 2 = 10$	$= 4 + 2(3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$4 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2$	$= 4 + 2(n - 1)$

Stap 2 : **Beskryf die patroon**

Die aantal mense wat rondom n tafels kan sit is $T_n = 4 + 2(n - 1)$.

Stap 3 : Bereken die 12^{de} term, met ander woorde, vind T_{12} as $n = 12$

$$\begin{aligned} T_{12} &= 4 + 2(12 - 1) \\ &= 4 + 2(11) \\ &= 4 + 22 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Daarom kan 26 mense rondom 12 tafels sit.

Stap 4 : Bereken die aantal tafels wat nodig is vir 20 mense. Met ander woorde, vind n as $T_n = 20$

$$\begin{aligned} T_n &= 4 + 2(n - 1) \\ 20 &= 4 + 2(n - 1) \\ 20 - 4 &= 2(n - 1) \\ \frac{16}{2} &= n - 1 \\ 8 + 1 &= n \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Daarom is 9 tafels nodig sodat 20 mense kan sit.

Dit is belangrik om te let op die verskil tussen n en T_n . n kan gesien word as 'n plekhouer, terwyl T_n die waarde is by die plek wat "gehou" word deur n . Soos in ons "Studeertafel" voorbeeld, kan 4 mense rondom die eerste tafel sit. Dus, by plek $n = 1$, is die waarde van $T_1 = 4$ ensovoorts:

n	1	2	3	4	...
T_n	4	6	8	10	...

Oefening 4 - 1

1. Skryf die volgende drie terme neer in elk van die reekse:

(a) 5; 15; 25; ...

(b) -8; -3; 2; ...

(c) 30; 27; 24; ...

2. Hieronder is die algemene formules vir 'n paar reekse gegee. Bereken die terme wat weggelaat is.

(a) 0; 3; ...; 15; 24 $T_n = n^2 - 1$

(b) 3; 2; 1; 0; ...; -2 $T_n = -n + 4$

(c) -11; ...; -7; ...; -3 $T_n = -13 + 2n$

3. Vind die algemene formule vir elk van die volgende reekse en vind dan T_{10} , T_{50} en T_{100} :

(a) 2; 5; 8; 11; 14; ...

(b) 0; 4; 8; 12; 16; ...

(c) 2; -1; -4; -7; -10; ...

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02pr (2.) 02ps (3.) 02pt

4.2 Patrone en bewerings



In wiskunde is 'n bewering 'n wiskundige stelling wat lyk of dit waar is, maar wat nog nie formeel as waar bewys is nie. 'n Bewering (of vermoede) kan gesien word as 'n wiskundige se manier om te sê: "Ek glo dit is waar, maar ek het nog bewyse nie." 'n Bewering kan gesien word as 'n intelligente raaskoot of idee wat moontlik 'n patroon kan wees.

Byvoorbeeld, maak 'n bewering oor die getal wat sal volg, gebaseer op die patroon 2; 6; 11; 17; ... Die getalle vermeerder met 4, dan 5, en dan 6. Bewering: Die volgende getal sal vermeerder met 7, so ons verwag dat die volgende getal $17 + 7 = 24$ sal wees.

 Video: MG10026 by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 3: Optelling van ewe en onewe getalle**PROBLEEM**

1. Ondersoek die soort getal wat jy kry as jy 'n ewe en 'n onewe getal bymekaartel.
2. Druk jou antwoord in woorde uit as 'n bewering.
3. Gebruik algebra om hierdie bewering te bewys.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ondersoek eers 'n paar voorbeelde**

$$23 + 12 = 35$$

$$148 + 31 = 179$$

$$11 + 200 = 211$$

Stap 2 : **Maak 'n bewering**

Die som van enige onewe getal en enige ewege tal is altyd onewe.

Stap 3 : **Beskryf algebraïes**

Druk die ewe getal uit as $2x$.

Druk die onewe getal uit as $2y - 1$.

$$\text{Som} = 2x + (2y - 1)$$

$$= 2x + 2y - 1$$

$$= (2x + 2y) - 1$$

$$= 2(x + y) - 1$$

Dis duidelik dat $2(x + y)$ 'n ewe getal is. Dus sal $2(x + y) - 1$ onewe wees.

Dus is ons bewering waar.

Voorbeeld 4: Vermenigvuldig 'n twee-syfer getal met 11**PROBLEEM**

1. Beskou die volgende voorbeelde van vermenigvuldiging van enige twee-syfer getal met 11. Watter patroon sien jy?

$$11 \times 42 = 462$$

$$11 \times 71 = 781$$

$$11 \times 45 = 495$$

2. Druk jou antwoord uit as 'n bewering.
3. Kan jy 'n teen-voorbeeld kry, een wat jou bewering weerlê? Indien wel, heroorweeg jou bewering.
4. Gebruik algebra om jou bewering te bewys.

OPLOSSING**Stap 1 : Vind die patroon**

Ons sien in die antwoord, die middelste syfer is die som van die syfers in die oorspronklike twee-syfer getal.

Stap 2 : Maak 'n bewering

Die middelste getal van die produk is die som van syfers van die twee-syfer getal wat met 11 vermenigvuldig word.

Stap 3 : Heroonweeg die bewering

Ons sien

$$11 \times 67 = 737$$

$$11 \times 56 = 616$$

Ons pas ons bewering aan om te sê dat dit net waar is indien die syfersom kleiner is as 10.

Stap 4 : Beskryf die bewering algebraïes

Enige twee-syfer getal kan geskryf word as $10a + b$. Byvoorbeeld

$$34 = 10(3) + 4.$$

Enige drie-syfer getal kan geskryf word as $100a + 10b + c$. Byvoorbeeld

$$582 = 100(5) + 10(8) + 2.$$

$$\begin{aligned} 11 \times (10x + y) &= 110x + 11y \\ &= (100x + 10x) + 10y + y \\ &= 100x + (10x + 10y) + y \\ &= 100x + 10(x + y) + y \end{aligned}$$

Hieruit sien ons die middelste syfer van 'n drie-syfer getal is gelyk aan die som van die twee syfers x en y .

Hoofstuk 4 | Opsomming

📌 Opsommingsaanbieding: VMcyz by www.everythingmaths.co.za

- Daar is 'n hele paar spesiale reekse van getalle:
 - Driehoeksgetalle 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; ...
 - Vierkantsgetalle 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; ...
 - Derdemagsgetalle 1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; ...
- Die algemene n^{de} term word geskryf as T_n .
- Die konstante verskil (d) is die verskil tussen twee opeenvolgende terme.
- Ons kan 'n algemene formule bepaal vir elke getalpatroon en dit gebruik om enige term in die patroon te vind.
- 'n Bewering is 'n vermoede wat jy aanneem om waar te wees maar nog nie bewys het nie.

Hoofstuk 4

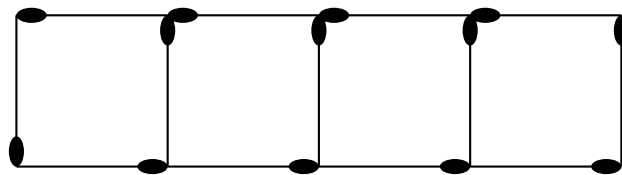
Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Vind die 6^{de} term vir die volgende reekse:

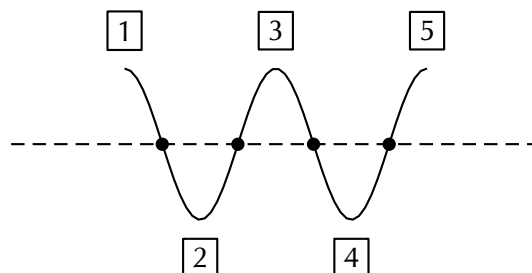
(a) 4; 13; 22; 31; ...

(b) 5; 2; -1; -4; ...

- (c) 7,4; 9,7; 12; 14,3;...
2. Vind die algemene term vir die volgende reekse:
- (a) 3; 7; 11; 15;...
- (b) -2 ; 1; 4; 7;...
- (c) 11; 15; 19; 23;...
- (d) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1; $1\frac{1}{3}$;...
3. Die sitplekke in 'n gedeelte van 'n sportstadion kan so gerangskik word dat die eerste ry 15 sitplekke het, die tweede ry 19 sitplekke, die derde ry 23 sitplekke, ens. Bereken hoeveel sitplekke is daar in ry 25.
4. 'n Enkele vierkant kan gemaak word van 4 vuurhoutjies. Om twee vierkante langs mekaar te maak het 7 vuurhoutjies nodig, om drie vierkante langs mekaar te maak het ons 10 vuurhoutjies nodig. Bepaal:
- (a) die eerste term
- (b) die konstante verskil
- (c) die algemene formule
- (d) hoeveel vuurhoutjies benodig word om 25 vierkante langs mekaar te maak.



5. Jy wil begin om geld te spaar, maar omdat jy dit nog nooit gedoen het nie, besluit jy om stadig te begin. Aan die einde van die eerste week sit jy R 5 in jou bankrekening, aan die einde van die tweede week R 10 en aan die einde van die derde week R 15. Na hoeveel weke sit jy R 50 in jou bankrekening?
6. 'n Horisontale lyn kruis 'n tou op 4 punte en deel die tou op in 4 dele, soos hieronder gewys word.



As die tou 19 keer gekruis word deur ewewydige lyne en elke lyn kruis die tou 4 keer op verskillende plekke, bereken in hoeveel dele die tou

opgedeel word.

7. Beskou die volgende patroon:

$$9 + 16 = 25$$

$$9 + 28 = 37$$

$$9 + 43 = 52$$

- (a) Watter patroon sien jy?
- (b) Maak 'n bewering en druk dit uit in woorde.
- (c) Veralgemeen jou bewering en druk dit algebraïes uit.
- (d) Bewys dat jou bewering waar is.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

- (1.) 02pu (2.) 02pv (3.) 02pw (4.) 02px (5.) 02py (6.) 02pz
(7.) 02q0

5.1 Funksies in die regte wêreld



Funksies is wiskundige verwantskappe tussen veranderlikes en hulle vorm boustene wat toepassings het in masjienontwerp, die voorspelling van natuurrampe, die mediese veld, ekonomiese analise en vliegtuigontwerp. 'n Funksie het vir elke invoerwaarde net 'n enkele uitvoerwaarde. Dit is moontlik dat 'n funksie meer as een inset van verskillende veranderlikes kan hê, maar dan sal dit steeds net 'n enkele uitset hê.

'n Grafiek is bloot 'n tekening van 'n funksie en dit word gebruik as 'n ander voorstellingswyse wat makliker is om te interpreteer as byvoorbeeld 'n tabel met getalle.

'n Paar tipiese voorbeelde van funksies waarmee jy moontlik bekend is:

- Die hoeveelheid geld wat jy het as 'n funksie van tyd. Hier is tyd die inset vir die funksie en die uitset is die bedrag geld. Jy sal op enige oomblik net een bedrag geld hê. As jy verstaan hoe jou bedrag geld verander oor tyd, kan jy beplan hoe om jou geld beter te spandeer. Besighede teken die grafiek van hulle geldsake oor tyd, sodat hulle kan sien wanneer hulle te veel geld spandeer.
- Die temperatuur is 'n voorbeeld van 'n funksie met veelvuldige insette, insluitend die tyd van die dag, die seisoen, die wolkbedekking, die wind, die plek en vele ander. Die belangrike ding om in te sien, is dat daar net een waarde vir temperatuur is op 'n spesifieke plek, op 'n spesifieke tyd.
- Jou posisie is 'n funksie van tyd omdat jy nie op twee plekke op dieselfde tyd kan wees nie. Indien jy twee mense se posisie as 'n funksie van tyd sou teken of stip ('plot'), sal die plek waar die lyne kruis, aandui waar die mense mekaar ontmoet. Hierdie idee word gebruik in logistiek – 'n veld van Wiskunde wat probeer voorspel waar mense en items is, hoofsaaklik vir besigheid.

▶ Video: VMawb by www.everythingmaths.co.za

DEFINISIE: Funksie

'n Funksie is 'n wiskundige verband tussen twee veranderlikes, waar elke invoerwaarde slegs een uitvoerwaarde het.

Afhanklike en onafhanklike veranderlikes

Die x -waardes van 'n funksie staan bekend as die invoerwaardes of onafhanklike veranderlikes omdat die waardes vrylik gekies is. Die y -waarde word bepaal deur die verband, gebaseer op 'n gegewe of gekose x -waarde. Die berekende y -waardes is bekend as die afhanklike veranderlikes, omdat die waardes afhanklik is van die gekose x -waardes.

Versamelingkeurdernotasie

Voorbeelde:

$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$	Die stel van alle x waardes, waar x 'n reële getal groter as 0 is.
$\{y : y \in \mathbb{N}, 3 < y \leq 5\}$	Die stel van alle y -waardes wat so is dat y 'n element is van die natuurlike getalle groter as 3 en kleiner of gelyk aan 5.
$\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leq 100\}$	Die stel van alle z -waardes wat so is dat z 'n element is van die versameling heelgetalle kleiner of gelyk aan 100.

Intervalnotasie



Hierdie notasie kan nie gebruik word om heelgetalle in 'n interval te beskryf nie.

Voorbeelde:

$(3; 11)$	'n Ronde hakie beteken die getal word uitgesluit uit die interval. Hierdie interval dui al die reële getalle groter as 3 (maar 3 uitgesluit) en kleiner as 11 (maar 11 uitgesluit).
$(-\infty; -2)$	Ronde hakies word altyd gebruik vir positiewe en negatiewe oneindigheid. Hierdie interval sluit alle reële getalle in kleiner as -2 , maar nie gelyk aan -2 nie.
$[1; 9)$	'n Reghoekige hakie beteken die getal word ingesluit by die interval. Hierdie interval dui al die reële getalle aan groter of gelyk aan 1 en kleiner as 9, maar nie gelyk aan 9 nie.

Funksie notasie



Dit is 'n baie handige manier om 'n funksie voor te stel. In stede van $y = 2x + 1$ skryf ons $f(x) = 2x + 1$. Ons sê “ f van x is gelyk aan $2x + 1$ ”. Enige letter kan gebruik word, b.v. $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$ ens.

1. Bepaal die uitvoerwaarde:

“Vind die waarde van die funksie vir $x = -3$ ”, kan geskryf word as: “vind $f(-3)$ ”.

Vervang x met -3 :

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2(-3) + 1 \\ \therefore f(-3) &= -5 \end{aligned}$$

Dit beteken dat wanneer $x = -3$ is die waarde van die funksie -5 .

2. Bepaal die invoerwaarde:

“Vind die waarde van x wat 'n y -waarde van 27 het”, kan geskryf word as: “vind x as $f(x) = 2x + 1 = 27$ ”.

Ons skryf die volgende vergelyking en los op vir x :

$$2x + 1 = 27$$

$$\therefore x = 13$$

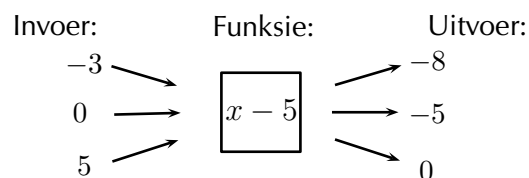
Dit beteken dat die funksiewaarde 27 sal wees.

Voorstellings van funksies



Funksies kan op verskillende maniere voorgestel word vir verskillende doeleindes.

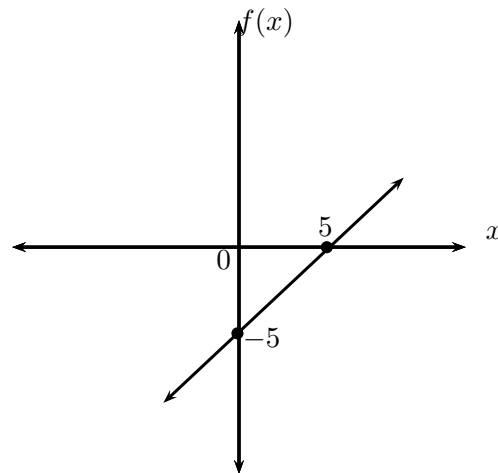
1. Woorde: “Die verband tussen twee getalle is so dat die een altyd 5 minder is as die ander een.”
2. Vloedidiagram:

**3. Tabel:**

Invoer (x)	-3	0	5
Uitvoer (y)	-8	-5	0

4. Versameling geordende getallepare: $(-3; -8), (0; -5), (5; 0)$
5. Algebraïese formule: $f(x) = x - 5$

6. Grafiek:



Definisieversameling en waardeversameling EMDAS

Die definisieversameling (ook bekend as die gebied) van 'n funksie is die stel onafhanklike x -waardes waarvoor daar y -waardes bestaan.

Die waardeversameling (ook bekend as die terrein) is die stel afhanklike y -waardes wat bepaal kan word deur die x -waardes.

Oefening 5 - 1

1. Skryf die volgende in keurernotasie:

- (a) $(-\infty; 7]$
- (b) $[13; 4)$
- (c) $(35; \infty)$
- (d) $[\frac{3}{4}; 21)$
- (e) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
- (f) $(-\sqrt{3}; \infty)$

2. Skryf die volgende in intervalnotasie:

- (a) $\{p : p \in \mathbb{R}, p \leq 6\}$
- (b) $\{k : k \in \mathbb{R}, -5 < k < 5\}$
- (c) $\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{5}\}$
- (d) $\{z : z \in \mathbb{R}, 21 \leq z < 41\}$

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02m9 (2.) 02ma

5.2 Lineêre funksies



Funksies van die vorm $y = x$



 Video: VMjlm by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 1: Trek reguitlyngrafiek

PROBLEEM

$$y = f(x) = x$$

Voltooi die volgende tabel van funksiewaardes vir $f(x) = x$ en stel die waardes op dieselfde assestelsel voor:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2				

1. Verbind die punte met 'n reguitlyn.
2. Bepaal die definisieversameling en waardeversameling.
3. Bepaal enige asse van simmetrie van f .
4. Bepaal die waarde van x as $f(x) = 4$.
Bevestig jou antwoord grafies.
5. Skryf neer waar die grafiek die asse sny.

OPLOSSING

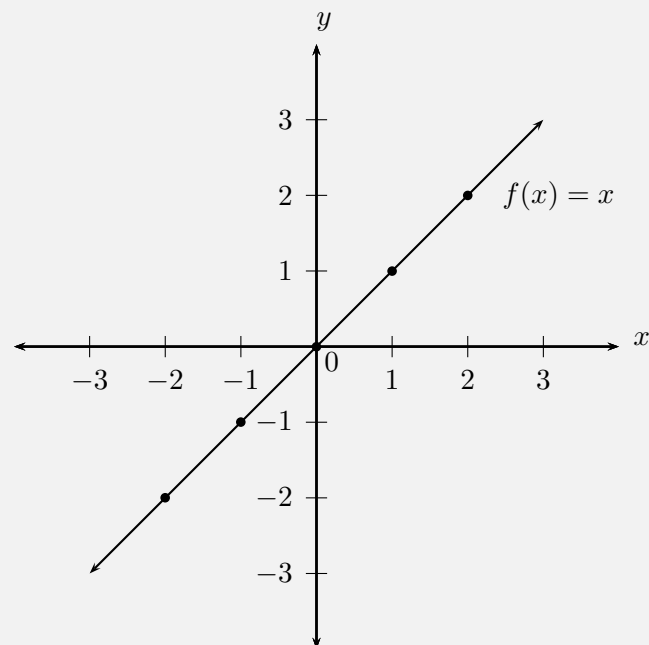
Stap 1 : Vervang die waardes in die vergelyking

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

Stap 2 : Stip die punte en verbind hulle met 'n reguitlyn

Ons kry die volgende punte uit die tabel en die grafiek:

$$(-2; -2), (-1; -1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)$$



Stap 3 : Bepaal die definisieversameling en waardeversameling

Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$

Waardeversameling: $f(x) \in \mathbb{R}$

Stap 4 : Bepaal die x waarde waarvoor $f(x) = 4$

Van die grafiek sien ons dat wanneer $f(x) = 4$, $x = 4$. Dit gee die punt $(4; 4)$.

Stap 5 : Bepaal die as-afsnitte

Die funksie f sny die asse by die oorsprong $(0; 0)$.

Funksies van die vorm $y = mx + c$

**Onderzoek:**

Die invloed van m en c op 'n reguitlyngrafiek

Op dieselfde asstelsel, trek die volgende grafieke:

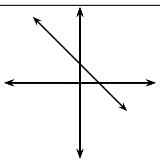
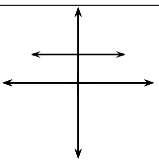
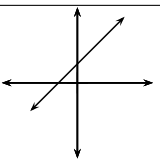
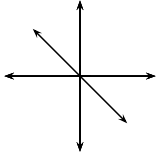
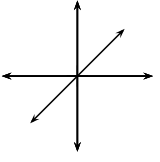
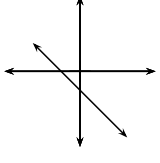
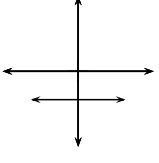
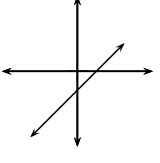
1. $y_1 = x - 2$
2. $y_2 = x - 1$
3. $y_3 = x$
4. $y_4 = x + 1$
5. $y_5 = x + 2$

Gebruik jou resultate om die invloed van verskillende waardes van c op die resulterende grafieke af te lei.

Op dieselfde asstelsel, trek die volgende grafieke:

6. $y_6 = -2x$
7. $y_7 = -x$
8. $y_8 = x$
9. $y_9 = 2x$

Gebruik jou resultate om die invloed van verskillende waardes van m op die resulterende grafieke af te lei.

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$c > 0$			
$c = 0$			
$c < 0$			

Die invloed van m

Jy behoort te vind dat die waarde van m die helling van die grafiek beïnvloed. As m vermeerder, vermeerder die helling van die grafiek ook.

Indien $m > 0$ sal die grafiek vermeerder van links na regs (opwaartse helling).

Indien $m < 0$ sal die grafiek verminder van links na regs (afwaartse helling). Dit is hoekom daar na m verwys word as die helling of die gradiënt van 'n reguitlynfunksie.

Die invloed van c

Jy behoort ook te vind dat die waarde van c die punt bepaal waar die grafiek die y -as sny.

Vir hierdie rede, staan c bekend as die y -afsnit.

As c toeneem, skuif die grafieke vertikaal opwaarts.

As c afneem, skuif die grafiek vertikaal afwaarts.

▶ Video: VMaxf by www.everythingmaths.co.za

Ontdek die kenmerke



Die standaardvorm van 'n reguitlynfunksie is: $y = mx + c$.

Definisieversameling en waardeversameling

Die definisieversameling is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde van $x \in \mathbb{R}$ is waarvoor $f(x)$ ongedefinieerd is nie.

Die waardeversameling van $f(x) = mx + c$ is ook $\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}\}$ omdat $f(x)$ enige reële waarde kan hê.

Afsnitte

Die y -afsnit:

Elke punt op die y -as het 'n x -koördinaat van 0. Daarom, bereken ons die y -afsnit deur $x = 0$ te stel.

Byvoorbeeld, die y -afsnit van $g(x) = x - 1$ word bepaal deur $x = 0$ te stel en dan op te los:

$$\begin{aligned}g(x) &= x - 1 \\g(0) &= 0 - 1 \\&= -1\end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -1)$.

Die x -afsnitte word as volg bereken:

Elke punt op die x -as het 'n y -koördinaat van 0. Daarom, bereken ons die x -afsnit deur $y = 0$ te stel.

Byvoorbeeld, die x -afsnit van $g(x) = x - 1$ word gegee deur $y = 0$ in te stel en dan op te los:

$$g(x) = x - 1$$

$$0 = x - 1$$

$$\therefore x = 1$$

Dit gee die punt (1;0).

Skets grafieke van die vorm $f(x) = mx + c$



Om die grafieke van die vorm, $f(x) = mx + c$, te skets, het ons die volgende drie kenmerkende eienskappe nodig:

1. die teken van m
2. y -afsnit
3. x -afsnit

Afsnitte metode



Slegs twee punte word benodig om 'n reguitlyn te trek. Die maklikste punte is die x -afsnit en die y -afsnit.

Voorbeeld 2: Skets 'n reguitlyngrafiek deur die afsnitte metode

PROBLEEM

Skets die grafiek van $g(x) = x - 1$ met die afsnitte metode.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ondersoek die standaardvorm van die funksie**

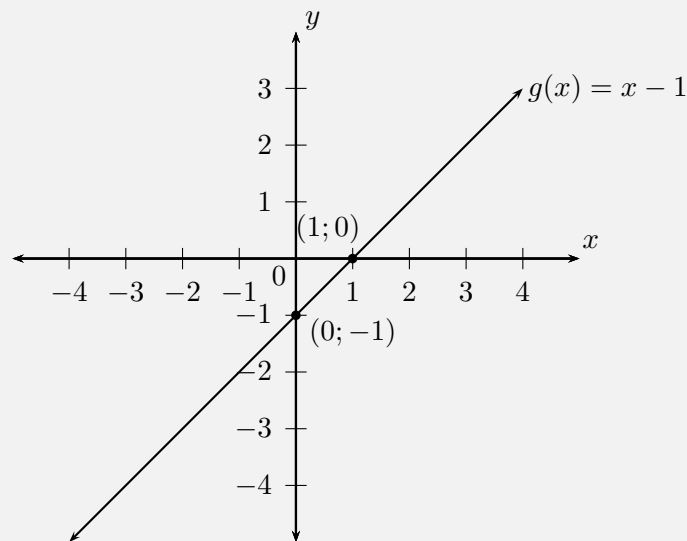
$m > 0$. Dus neem die grafieke toe soos x toeneem.

Stap 2 : Bereken afsnitte

Die y -afsnit word bepaal deur $x = 0$ te stel; daarom $g(0) = -1$.
 $\therefore y$ -afsnit is $(0; -1)$.

Die x -afsnit word bepaal deur $y = 0$ te stel; daarom $x = 1$.
 $\therefore x$ -afsnit is $(1; 0)$.

Stap 3 : Stip punte en trek die grafiek



Gradient en y -afsnit metode



Ons kan 'n reguitlyngrafiek trek van $y = mx + c$ deur die gradiënt m en die y -afsnit c te gebruik.

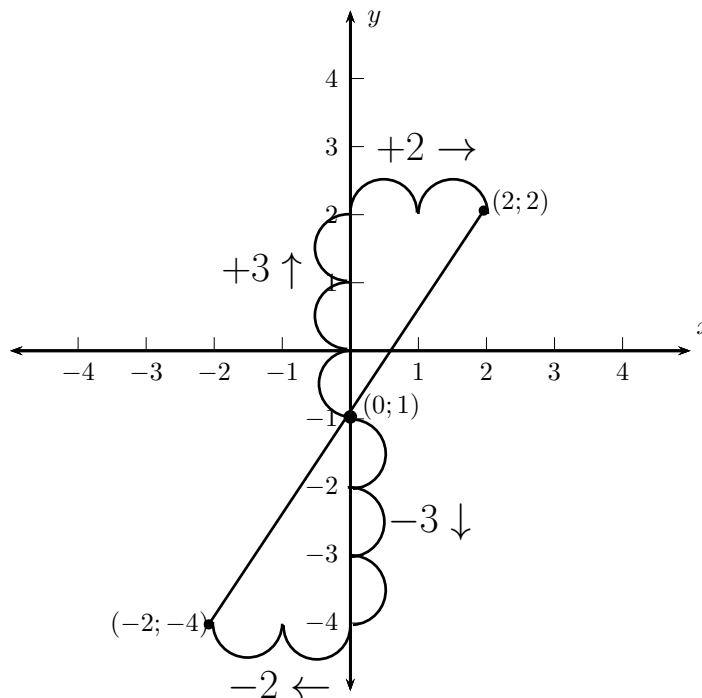
Ons bereken die y -afsnit deur $x = 0$ te stel. Dit gee een punt waardeur die grafiek gaan. Bereken 'n ander punt deur die gradiënt (m) te gebruik.

Die gradiënt van 'n lyn is die maatstaf van helling. Helling word gegee deur die verhouding vertikale verandering tot horisontale verandering te bepaal:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{\text{vertikale verandering}}{\text{horisontale verandering}}$$

Byvoorbeeld: $y = \frac{3}{2}x - 1$, daarom $m > 0$ en y neem toe as x toeneem

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{3 \uparrow}{2 \rightarrow} = \frac{-3 \downarrow}{-2 \leftarrow}$$



Voorbeeld 3: Skets reguitlyngrafieke deur die gradiënt en y -afsnit metode te gebruik

PROBLEEM

Skets die reguitlyngrafiek $p(x) = \frac{1}{2}x - 3$ deur die gradiënt en y -afsnit metode te gebruik.

OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik y -afsnit**

$c = -3$, wat die punt $(0; -3)$ gee.

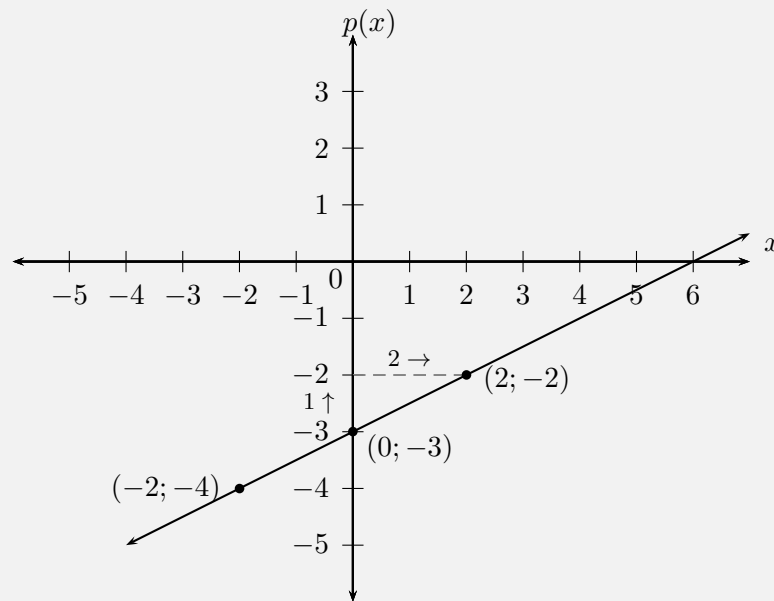
Stap 2 : **Gebruik die gradiënt**

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{1 \uparrow}{2 \rightarrow} = \frac{-1 \downarrow}{-2 \leftarrow}$$

Begin by $(0; -3)$. Beweeg 1 eenheid op en 2 eenhede regs. Dit gee die tweede punt $(2; -2)$.

Of begin by $(0; -3)$, beweeg 1 eenheid af en 2 eenhede links. Dit gee die tweede punt $(-2; -4)$.

Stap 3 : Stip punte en trek die grafiek



Let op: Die grafiek is kontinu en strek in beide rigtings.

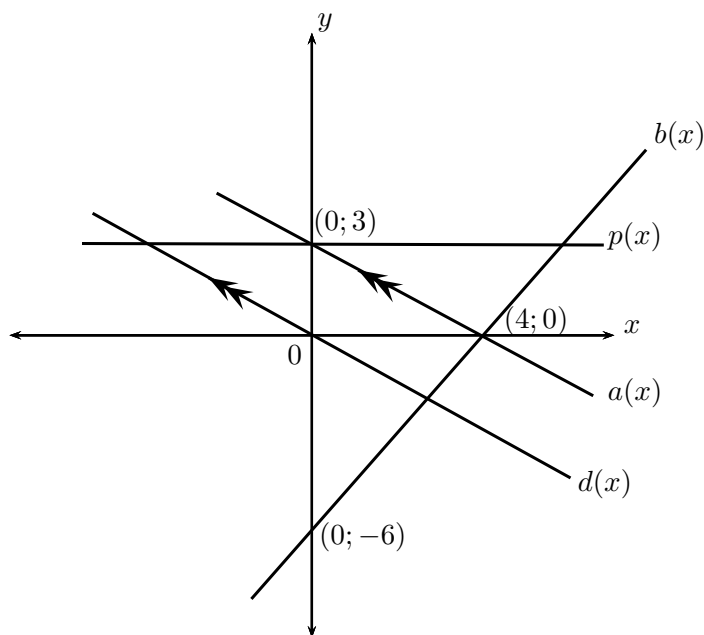
Skryf altyd die funksie voorskrif in die vorm $y = mx + c$ en let op die waarde van m . Na die grafiek getrek is, maak seker dat as $m > 0$, neem die grafiek toe en as $m < 0$, neem die grafiek af as x toeneem.

Oefening 5 - 2

1. Gee die x - en y -afsnitte van die volgende reguitlyngrafieke. Dui aan of die grafiek toeneem of afneem as x toeneem:

- (a) $y = x + 1$
- (b) $y = x - 1$
- (c) $h(x) = 2x - 1$
- (d) $y + 3x = 1$

- (e) $3y - 2x = 6$
 (f) $k(x) = -3$
 (g) $x = 3y$
 (h) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
2. Gee die vergelykings van elk van die volgende grafieke:
- (a) $a(x)$
 (b) $b(x)$
 (c) $p(x)$
 (d) $d(x)$



3. Skets die volgende funksies op dieselfde stel asse deur die afsnitte metode te gebruik. Dui die as-afsnitte duidelik aan asook die koördinate van die snypunt van die grafieke van $x + 2y - 5 = 0$ en $3x - y - 1 = 0$.
4. Trek die grafieke van $f(x) = 3 - 3x$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ met die gradiënt-afsnit metode.

A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02mb (2.) 02mc (3.) 02md (4.) 02me

5.3 Paraboliese funksies



Funksies van die vorm $y = x^2$



Video: VMaxl by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 4: Teken die grafiek van 'n kwadratiese funksie

PROBLEEM

$$y = f(x) = x^2$$

Voltooi die volgende tabel van funksiewaardes vir $f(x) = x^2$ en stel die waardes op dieselfde assestelsel voor:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9						

1. Verbind die punte met 'n gladde kurwe.
2. Die definisieversameling van f is $x \in \mathbb{R}$. Bepaal die waardeversameling.
3. Bepaal die as van simmetrie van f .
4. Bepaal die waarde van x as $f(x) = 6\frac{1}{4}$.
Bevestig jou antwoord grafies.
5. Skryf neer waar die grafiek die asse sny.

OPLOSSING

Stap 1 : Vervang die waardes in die vergelyking

$$f(x) = x^2$$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

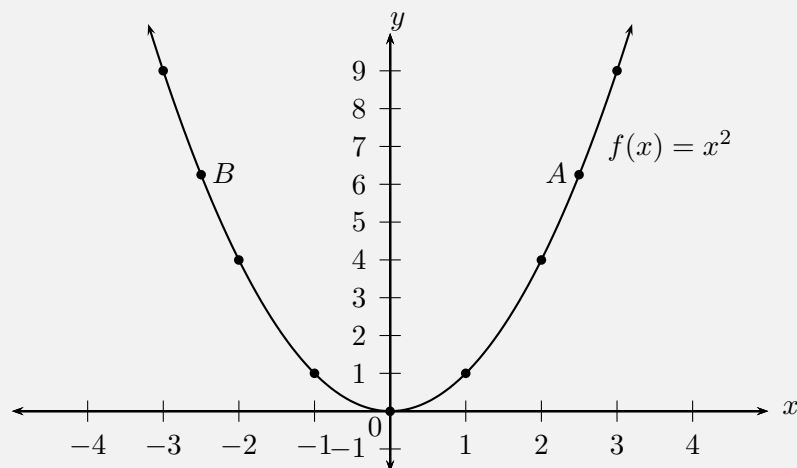
$$f(3) = (3)^2 = 9$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Stap 2 : Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme

Ons kry die volgende punte uit die tabel:

$(-3; 9), (-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)$



Stap 3 : Bepaal die waardeversameling

Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$.

Van die grafiek sien ons dat y groter of gelyk aan 0 sal wees vir alle waardes van x .

Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$.

Stap 4 : Vind die simmetrie-as

f is simmetries rondom die y -as. Dus is die lyn $x = 0$ die as van

simmetrie.

Stap 5 : Bepaal die x -waarde

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{25}{4} \\ \therefore \frac{25}{4} &= x^2 \\ x &= \pm \frac{5}{2} \\ &= \pm 2\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sien punte A en B op die grafiek.

Stap 6 : Bepaal die as -afsnitte

Funksie f sny die asse by die oorsprong $(0; 0)$.

Let op as die x -waarde toeneem van $-\infty$ tot 0 , verminder $f(x)$.

By die draaipunt $(0; 0)$, is $f(x) = 0$, die minimumwaarde van die funksie.

Soos x toeneem van 0 tot ∞ , neem $f(x)$ toe.

Funksies van die vorm $y = ax^2 + q$


Onderzoek:

Die invloed van a en q op 'n paraboliese grafiek

Voltooi die tabel en teken die volgende grafiek op dieselfde assesstelsel:

1. $y_1 = x^2 - 2$
2. $y_2 = x^2 - 1$
3. $y_3 = x^2$
4. $y_4 = x^2 + 1$
5. $y_5 = x^2 + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y_1					
y_2					
y_3					
y_4					
y_5					

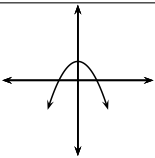
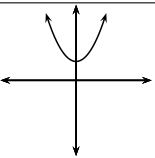
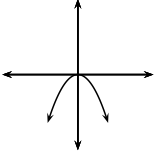
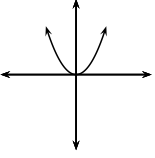
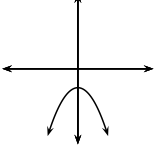
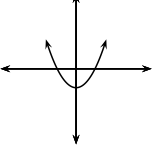
Gebruik jou resultate en maak 'n afleiding oor die invloed van q .

Voltooi die tabel en teken die volgende grafiek op dieselfde assesstelsel:

6. $y_6 = -2x^2$
7. $y_7 = -x^2$
8. $y_8 = x^2$
9. $y_9 = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y_6					
y_7					
y_8					
y_9					

Gebruik jou resultate en maak 'n afleiding oor die invloed van a .

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Die invloed q

Die waarde van q word 'n vertikale skuif omdat alle punte dieselfde afstand in die selfde rigting beweeg (dit skuif die hele grafiek op of af).

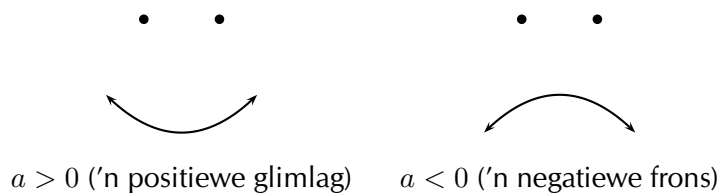
- Indien $q > 0$, sal die grafiek van $f(x)$ q eenhede vertikaal opwaarts skuif. Die draaipunt van $f(x)$ is bokant die y -as.
- Indien $q < 0$, sal die grafiek van $f(x)$ q eenhede vertikaal afwaarts skuif. Die draaipunt van $f(x)$ is onderkant die y -as.

Die invloed van a

Die waarde van a bepaal die vorm van die grafiek.

- Indien $a > 0$, sal die grafiek $f(x)$ "glimlag" en het 'n minimum draaipunt by $(0; q)$. Die grafiek van $f(x)$ word opwaarts gerek. Soos a groter word, word die grafiek nouer.
Vir $0 < a < 1$, sal die grafiek van $f(x)$ wyer word as a nader aan 0 beweeg.
- Indien $a < 0$, sal die grafiek van $f(x)$ 'frons' en het 'n maksimum draaipunt $(0; q)$. Die grafiek van $f(x)$ word vertikaal afwaarts gerek; soos a kleiner word, word die grafiek nouer.
Vir $-1 < a < 0$, sal die grafiek van $f(x)$ wyer word as a nader aan 0 beweeg.

🔗 Simulasie: MG10018 by www.everythingmaths.co.za



Ontdek die kenmerke



Die standaardvorm van die paraboliese funksie is: $y = ax^2 + q$.

Definisieversameling en waardeversameling

Die definisieversameling is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ omdat daar nie 'n reële waarde van x is waarvoor $f(x)$ ongedefinieerd is nie.

Indien $a > 0$ dan het ons:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 && \text{(die kwadraat van 'n uitdrukking is altyd positief)} \\ ax^2 &\geq 0 && \text{(aangesien } a > 0) \\ ax^2 + q &\geq q && \text{(tel } q \text{ weerskante by)} \\ \therefore f(x) &\geq q \end{aligned}$$

Dus, indien $a > 0$, is die waardeversameling gelyk aan $[q, \infty)$. Soortgelyk, kan ons aantoon dat indien $a < 0$, is die waardeversameling van $(-\infty, q]$.

Voorbeeld 5: Definisie- en waardeversameling van 'n parabool

PROBLEEM

As $g(x) = x^2 + 2$, bepaal die definisieversameling en waardeversameling van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1 : Bepaal die definisieversameling

Die definisieversameling is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $g(x)$ ongedefinieerd is nie.

Stap 2 : Bepaal die waardeversameling

Die waardeversameling van $g(x)$ kan as volg bereken word:

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 2 \geq 2$$

$$g(x) \geq 2$$

Dus is die waardeversameling gelyk aan $\{g(x) : g(x) \geq 2\}$.

Afsnitte**Die y -afsnit:**

Elke punt op die y -as het 'n x -koördinaat van 0. Dus bereken ons die y -afsnit deur $x = 0$ te stel.

Byvoorbeeld, die y -afsnit van $g(x) = x^2 + 2$ word verkry deur $x = 0$ te stel, en dan:

$$g(x) = x^2 + 2$$

$$g(0) = 0^2 + 2$$

$$= 2$$

Dit gee die punt $(0; 2)$.

Die x -afsnit:

Elke punt op die x -as het 'n y -koördinaat van 0. Dus bereken ons die x -afsnit deur $y = 0$ te stel.

Byvoorbeeld, die x -afsnit van $g(x) = x^2 + 2$ word verkry deur $y = 0$ stel, en dan:

$$g(x) = x^2 + 2$$

$$0 = x^2 + 2$$

$$-2 = x^2$$

Hierdie antwoord is nie reëel nie. Daarom het die grafiek van $g(x) = x^2 + 2$ geen x -afsnitte nie.

Draaipunte

Die draaipunte van funksies van die vorm $f(x) = ax^2 + q$ word gegee deur na die waardeversameling van die funksie te kyk.

- Indien $a > 0$, het die grafiek van $f(x)$ 'n "glimlag"-vorm en het 'n minimum draaipunt by $(0; q)$.
- Indien $a < 0$, het die grafiek van $f(x)$ 'n "frons"-vorm en het 'n maksimum draaipunt by $(0; q)$.

Asse van simmetrie

Daar is een simmetrie-as vir die funksie met die vorm $f(x) = ax^2 + q$ en dit gaan deur die draaipunt. Omdat die draaipunt op die y -as lê, is die simmetrie-as die lyn $x = 0$.

Skets grafieke van die vorm $y = ax^2 + q$



Om 'n grafiek te skets van die vorm, $f(x) = ax^2 + q$ het ons die volgende kenmerkende eienskappe nodig:

1. die teken van a
2. y -afsnit
3. x -afsnit
4. draaipunt

Voorbeeld 6: Sketse van parabole**PROBLEEM**

Trek die grafiek van $y = 2x^2 - 4$. Merk die afsnitte en die draaipunt.

OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die vorm van die parabool**

Ons sien dat $a > 0$, dus het die grafiek 'n "glimlag"-vorm en 'n minimum draaipunt.

Stap 2 : Bereken die afsnitte

Die y -afsnit word bepaal deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4 \\&= 2(0)^2 - 4 \\&= -4\end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -4)$.

Die x -afsnit word bepaal deur $y = 0$ te stel:

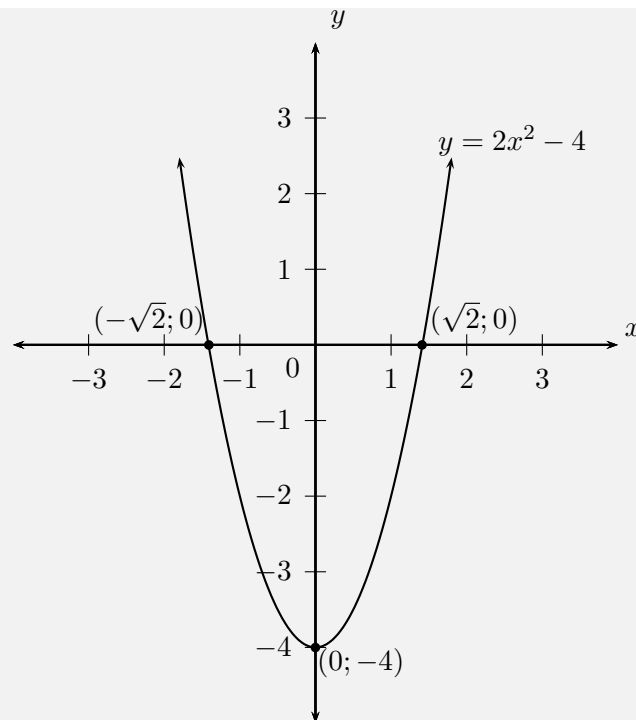
$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4 \\0 &= 2x^2 - 4 \\x^2 &= 2 \\\therefore x &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-\sqrt{2}; 0)$ en $(\sqrt{2}; 0)$.

Stap 3 : Bepaal die draaipunt

Die draaipunt is gelyk aan die y -afsnit wat ons as $(0; -4)$ bereken het.

Stap 4 : Stip die punte en skets die grafiek



Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Waardeversameling: $\{y : y \geq -4, y \in \mathbb{R}\}$.

As van simmetrie: $x = 0$ (y -as).

Voorbeeld 7: Sketse van parabole

PROBLEEM

Trek 'n grafiek van $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$. Merk die afsnitte en die draaipunt.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ondersoek die vorm van die parabool**

Ons sien dat $a < 0$, dus het die grafiek 'n "frons"-vorm en het 'n maksimum draaipunt.

Stap 2 : **Bereken die afsnitte**

Die y -afsnit word bepaal deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 3 \\ g(0) &= -\frac{1}{2}(0)^2 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -3)$.

Die x -afsnit word bepaal deur $y = 0$ te stel:

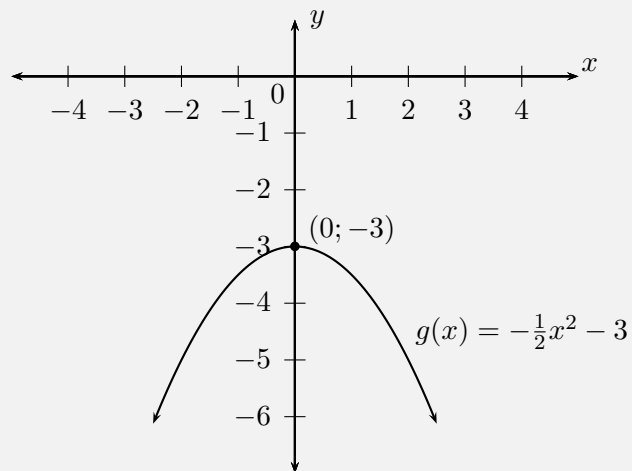
$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x^2 - 3 \\ 3 &= -\frac{1}{2}x^2 \\ -2(3) &= x^2 \\ -6 &= x^2 \end{aligned}$$

Die oplossing van die vergelyking is nie reëel nie. Daarom is daar geen x -afsnitte nie.

Stap 3 : Bepaal die draaipunt

Die draaipunt is gelyk aan die y -afsnit wat ons bereken het as $(0; -3)$.

Stap 4 : Stip die punte en skets die grafiek



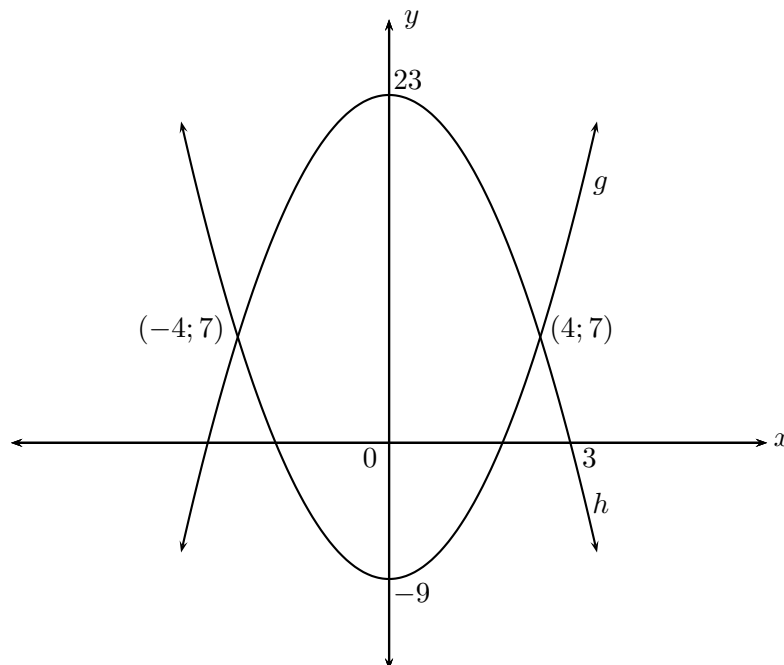
Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Waardeversameling: $\{y : y \leq -3, y \in \mathbb{R}\}$.

As van simmetrie: $x = 0$ (y -as).

Oefening 5 - 3

1. Wys dat indien $a < 0$ sal die waardeversameling van $f(x) = ax^2 + q$ $\{f(x) : f(x) \leq q\}$ wees.
2. Skets die grafiek van die funksie $y = -x^2 + 4$ en toon al die afsnitte met die asse.
3. Twee parabole is geteken: $g(x) = y = ax^2 + p$ en $h(x) = y = bx^2 + q$.



- (a) Vind die waardes van a en p .
- (b) Vind die waardes van b en q .
- (c) Vind die waardes van x waarvoor $g(x) \geq h(x)$.
- (d) Vir watter waardes van x is $g(x)$ toenemend?

A+ Meer oefening
 ▶ video oplossings
 ? of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02mf (2.) 02mg (3.) 02mh

5.4 Hiperboliese funksies



Video: VMaxw by www.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = \frac{1}{x}$



Voorbeeld 8: Trek die grafiek van 'n hiperbool

PROBLEEM

$$y = h(x) = \frac{1}{x}$$

Voltooi die volgende tabel vir $h(x) = \frac{1}{x}$ en stip die punte op 'n assessstelsel.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	$-\frac{1}{3}$										

1. Verbind die punte met 'n gladde kromme.
2. Wat gebeur as $x = 0$?
3. Verduidelik waarom die grafiek uit twee aparte krommes bestaan.
4. Wat gebeur met $h(x)$ as die waarde van x baie klein of baie groot word?
5. Die definisieversameling van $h(x)$ is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$. Bepaal die waardeversameling.
6. Rondom watter twee lyne is die grafiek simmetries?

OPLOSSING

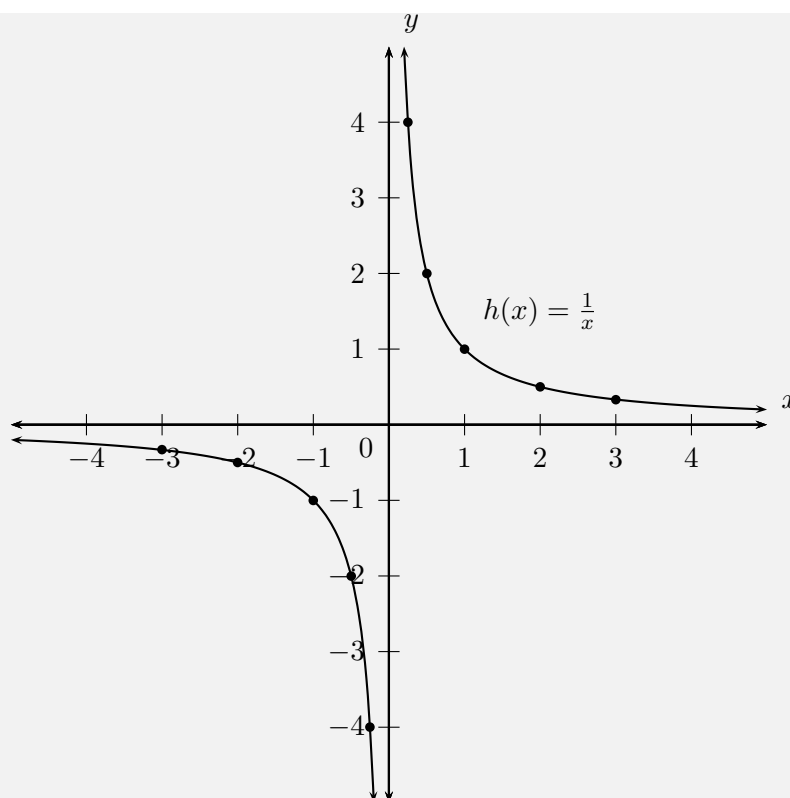
Stap 1 : **Stel waardes in die vergelyking in**

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{1}{x} \\
 h(-3) &= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \\
 h(-2) &= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \\
 h(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\
 h(-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \\
 h(-\frac{1}{4}) &= \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \\
 h(0) &= \frac{1}{0} = \text{ongedefinieer} \\
 h(\frac{1}{4}) &= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \\
 h(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \\
 h(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\
 h(2) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
 h(3) &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	ongedefinieer	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Stap 2 : Stip die punte en verbind hulle apart met gladde krommes

Vanaf die tabel kry ons die volgende punte: $(-3; -\frac{1}{3})$, $(-2; -\frac{1}{2})$, $(-1; -1)$, $(-\frac{1}{2}; -2)$, $(-\frac{1}{4}; -4)$, $(\frac{1}{4}; 4)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ en $(3; \frac{1}{3})$.



Funksie h is ongedefineerd vir $x = 0$. Daar is dus 'n breuk (diskontinuiteit) by $x = 0$.

$y = h(x) = \frac{1}{x}$ dus kan ons skryf $x \times y = 1$. Aangesien die produk van twee positiewe getalle **asook** die produk van twee negatiewe getalle gelyk aan 1 kan wees, lê die grafiek in die eerste en derde kwadrante.

Stap 3 : Bepaal die asimptote

As die waarde van x toeneem, kom die waarde van $h(x)$ al nader aan 0 maar word nooit 0 nie. Dus noem ons die x -as, die lyn $y = 0$, 'n horisontale asimptoot van die grafiek. Dieselfde gebeur in die derde kwadrant: as x kleiner word, sal $h(x)$ die x -as asimptoties nader.

Let op dat daar ook 'n vertikale asimptoot is: die y -as met vergelyking $x = 0$; hoe nader x kom aan 0, hoe nader $h(x)$ kom aan die y -as asimptotes.

Stap 4 : Bepaal die waardeversameling

Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Van die grafiek sien ons y is gedefinieer vir alle waardes van x behalwe $x = 0$.

Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

Stap 5 : Bepaal die asse van simmetrie

Die grafiek van $h(x)$ het twee asse van simmetrie, naamlik die lyne $y = x$ en $y = -x$. Die twee helftes van die hiperbool is spieëlbeelde van mekaar met betrekking tot hierdie lyne.

Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$

 EMDBH

Ondersoek:

Die invloed van a en q op 'n hiperbool

Op dieselfde assestelsel, trek die volgende grafieke:

1. $y_1 = \frac{1}{x} - 2$

2. $y_2 = \frac{1}{x} - 1$

3. $y_3 = \frac{1}{x}$

4. $y_4 = \frac{1}{x} + 1$

5. $y_5 = \frac{1}{x} + 2$

Gebruik jou resultate om die invloed van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, trek die volgende grafieke:

6. $y_6 = \frac{-2}{x}$

7. $y_7 = \frac{-1}{x}$

8. $y_8 = \frac{1}{x}$

9. $y_9 = \frac{2}{x}$

Gebruik jou resultate om die invloed van a af te lei.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Die invloed van q

Jy behoort te vind dat die waarde van q bepaal of die grafiek op- of afskuif ten opsigte van die x -as. Dit word 'n vertikale skuif genoem omdat al die punte dieselfde afstand in dieselfde rigting skuif. Die hele grafiek skuif op of af.

- Vir $q > 0$, skuif die grafiek van $h(x)$ q eenhede vertikale op.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek van $h(x)$ q eenhede vertikale af.

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$ en die vertikale asimptoot is die y -as, die lyn $x = 0$.

Die invloed van a

Jy behoort te vind dat die waarde van a bepaal die vorm van die grafiek en of die grafiek in die eerste en derde kwadrante of in die tweede en vierde kwadrante van die Cartesiese vlak lê.

- Indien $a > 0$, sal die grafiek van $h(x)$ in die eerste en derde kwadrante lê.
 Vir $a > 1$, sal die grafiek van $h(x)$ verder weg lê van die asse as $y = \frac{1}{x}$.
 Vir $0 < a < 1$, as a neig na 0, skuif die grafiek nader aan die asse as $y = \frac{1}{x}$.
- Indien $a < 0$, sal die grafiek van $h(x)$ in die tweede en vierde kwadrante van die Cartesiese vlak lê.
 Vir $a < -1$, sal die grafiek van $h(x)$ verder weg lê van die asse as $y = -\frac{1}{x}$.
 Vir $-1 < a < 0$, as a neig na 0, skuif die grafiek nader aan die asse as $y = -\frac{1}{x}$.

Ontdek die kenmerke



Die standaard vorm van die hiperboliese funksie is $y = \frac{a}{x} + q$.

Definisieversameling en waardeversameling

Die funksie $y = \frac{a}{x} + q$ is ongedefinieerd vir $x = 0$.

Die definisieversameling is dus $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

Ons kan sien dat $y = \frac{a}{x} + q$ herskryf kan word as:

$$y = \frac{a}{x} + q$$

$$y - q = \frac{a}{x}$$

$$\text{Indien } x \neq 0 \text{ dan : } (y - q)x = a$$

$$x = \frac{a}{y - q}$$

Dit wys dat die funksie ongedefinieerd is by $y = q$.

Die waardeversameling van $f(x) = \frac{a}{x} + q$ is $\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}, f(x) \neq q\}$.

Voorbeeld 9: Definisie- en waardeversameling van 'n hiperbool

PROBLEEM

As $g(x) = \frac{2}{x} + 2$, vind die definisieversameling en waardeversameling van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1 : Bereken die definisieversameling

Die definisieversameling is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ omdat $g(x)$ ongedefinieerd is by $x = 0$.

Stap 2 : Bereken die waardeversameling

Ons sien dat $g(x)$ ongedefinieerd is by $y = 2$. Die waardeversamling is dus $\{g(x) : g(x) \in \mathbb{R}, g(x) \neq 2\}$.

Afsnitte

Die y -afsnit:

Elke punt op die y -as het 'n x -koördinaat van 0. Dus bereken ons die y -afsnit deur $x = 0$ te stel.

As $g(x) = \frac{2}{x} + 2$ stel $x = 0$:

$$y = \frac{2}{x} + 2$$

$$y = \frac{2}{0} + 2$$

Dit is ongedefinieerd omdat ons deur nul deel. Daar is dus geen y -afsnit nie.

Die x -afsnit:

Elke punt op die x -as het 'n y -koördinaat van 0. Dus bereken ons die x -afsnit deur $y = 0$ te stel.

As $g(x) = \frac{2}{x} + 2$ stel $y = 0$:

$$y = \frac{2}{x} + 2$$

$$0 = \frac{2}{x} + 2$$

$$\frac{2}{x} = -2$$

$$x = \frac{2}{-2}$$

$$x = -1$$

Dit gee die punt $(-1; 0)$.

Asimptote

Daar is twee asimptote vir funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$.

Ons het gesien dat die funksie ongedefinieerd is by $x = 0$ en $y = q$. Dus is die asimptote $y = q$ en $x = 0$ (y -as).

Asse van simmetrie

Daar is twee lyne ten opsigte waarvan die hiperbool simmetries is, naamlik $y = ax + q$ en $y = -ax + q$. As $y = \frac{2}{x} + 2$, is die simmetrie-asse $y = x + 2$ en $y = -x + 2$.

Skets grafieke van die vorm $f(x) = \frac{a}{x} + q$ 

Om grafieke van funksies van die vorm $f(x) = \frac{a}{x} + q$ te skets, het ons vier eienskappe nodig.

1. teken van a
2. y -afsnitte
3. x -afsnitte
4. asimptote

Voorbeeld 10: Skets 'n hiperbool**PROBLEEM**

Skets die grafiek $g(x) = \frac{2}{x} + 2$. Merk die afsnitte en asimptote.

OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die hiperbool**

Ons sien dat $a > 0$, dus lê die grafiek $g(x)$ in die eerste en derde kwardrante.

Stap 2 : Bereken die afsnitte

y -afsnit, stel $x = 0$:

$$g(x) = \frac{2}{x} + 2$$

$$g(0) = \frac{2}{0} + 2$$

Dit is ongedefinieerd, dus is daar geen y -afsnit nie.

x -afsnit, stel $y = 0$:

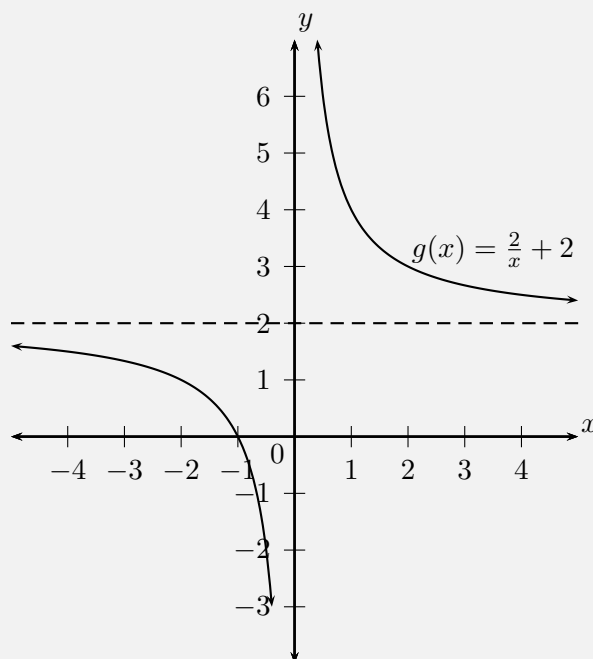
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x} + 2 \\ 0 &= \frac{2}{x} + 2 \\ \frac{2}{x} &= -2 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-1; 0)$.

Stap 3 : Bepaal die asimptote

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = 2$ en die vertikale asimptoot is die lyn $x = 0$.

Stap 4 : Skets die grafieke



Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$.

Voorbeeld 11: Skets 'n hiperbool**PROBLEEM**

Skets die grafiek van $y = \frac{-4}{x} + 7$.

OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die hiperbool**

Ons sien dat $a < 0$, dus die grafiek lê in kwadrante 2 en 4.

Stap 2 : Bereken die afsnitte

Die y -afsnit is waar $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-4}{x} + 7 \\ &= \frac{-4}{0} + 7 \end{aligned}$$

Die funksie is ongedefinieerd by $x = 0$. Daar is geen y -afsnit nie.

Die x -afsnit is waar $y = 0$:

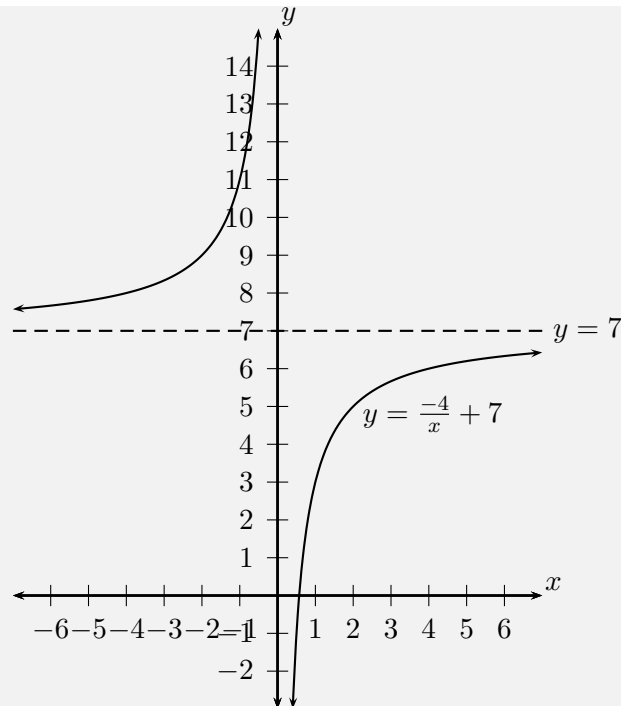
$$\begin{aligned} y &= \frac{-4}{x} + 7 \\ 0 &= \frac{-4}{x} + 7 \\ \frac{-4}{x} &= -7 \\ \therefore x &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Daar is dus een x -afsnit by $\left(\frac{4}{7}; 0\right)$.

Stap 3 : Bepaal die asimptote

Ons kyk na die definisieversameling en die waardeversameling om te bepaal waar die asimptote lê. Van die definisieversameling kan ons sien dat die funksie ongedefinieerd is wanneer $x = 0$, dus daar is een asimptoot by $x = 0$. Die funksie is ongedefinieerd by $y = q$. Dus die tweede asimptoot is by $y = 7$.

Stap 4 : Skets die grafiek



Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 7\}$.

Asse van simmetrie: $y = x + 7$ en $y = -x + 7$.

Oefening 5 - 4

1. Gebruik grafiekpapier en teken die grafiek van $xy = -6$.
 - (a) Lê die punt $(-2; 3)$ op die grafiek? Gee 'n rede vir jou antwoord.
 - (b) As die x -waarde van 'n punt op die grafiek gelyk is aan 0,25 wat is die ooreenstemmende y -waarde?
 - (c) Wat gebeur met die y -waardes as die x -waardes baie groot word?
 - (d) Gee die vergelykings van die asimptote.
 - (e) Met die lyn $y = -x$ as 'n lyn van simmetrie, watter punt is simmetries ten opsigte van $(-2; 3)$?
2. Skets die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$.
 - (a) Hoe sal die grafiek $g(x) = \frac{8}{x} + 3$ vergelyk met die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$? Verduidelik jou antwoord.
 - (b) Skets die grafiek van $y = \frac{8}{x} + 3$ op dieselfde assestelsel. Toon die

asimptote, asse van simmetrie en die koördinate van een punt op die grafiek.

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02mi (2.) 02mj

5.5 Ekspónensiële funksies

 EMDBK

Funksies van die vorm $y = b^x$

 EMDBL

 Video: VMaxx by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 12: Trek die grafiek van 'n eksponensiële funksie

PROBLEEM

$$y = f(x) = b^x \text{ vir } b > 0 \text{ en } b \neq 1$$

Voltooi die tabel vir elk van die funksies en trek die grafieke op dieselfde assess-telsel: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 5^x$.

	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$					
$g(x) = 3^x$					
$h(x) = 5^x$					

1. By watter punt sny al die grafieke?
2. Verduidelik waarom hulle nie die x -as sny nie.
3. Gee die definisieversameling en waardeversameling van $h(x)$.
4. Neem die waarde van x af of toe soos $h(x)$ toeneem?
5. Watter een van hierdie grafieke neem toe teen die stadigste tempo?
6. Is die volgende bewering waar of vals ten opsigte van $y = k^x$ met $k > 1$:
 “Hoe groter k , hoe steiler die grafiek van $y = k^x$ ”?

Voltooi die volgende tabel vir elk van die funksies en trek die grafieke op dieselfde asse stelsel: $F(x) = (\frac{1}{2})^x$, $G(x) = (3)^{-x}$, $H(x) = (\frac{1}{5})^x$

	-2	-1	0	1	2
$F(x) = (\frac{1}{2})^x$					
$G(x) = (\frac{1}{3})^x$					
$H(x) = (\frac{1}{5})^x$					

7. Gee die y -afsnit vir elke funksie.
8. Bespreek die verband tussen die grafieke van $f(x)$ en $F(x)$.
9. Bespreek die verband tussen die grafieke $g(x)$ en $G(x)$.
10. Gee die definisieversameling en waardeversameling van $H(x)$.
11. Is die bewering waar of vals ten opsigte van $y = (\frac{1}{k})^x$ met $k > 1$:
 “Hoe groter die waarde van k , hoe steiler is die grafiek”?
12. Gee die vergelykings van die asimptote van elke funksie.

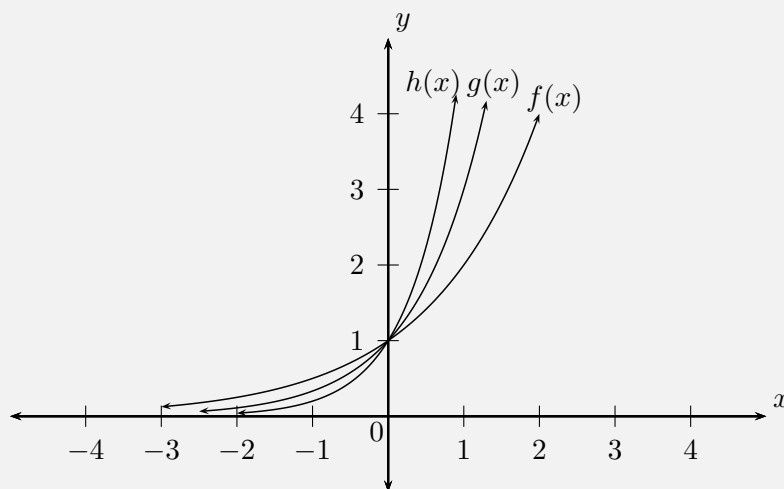
OPLOSSING

Stap 1 : **Vervang waardes in die vergelykings**

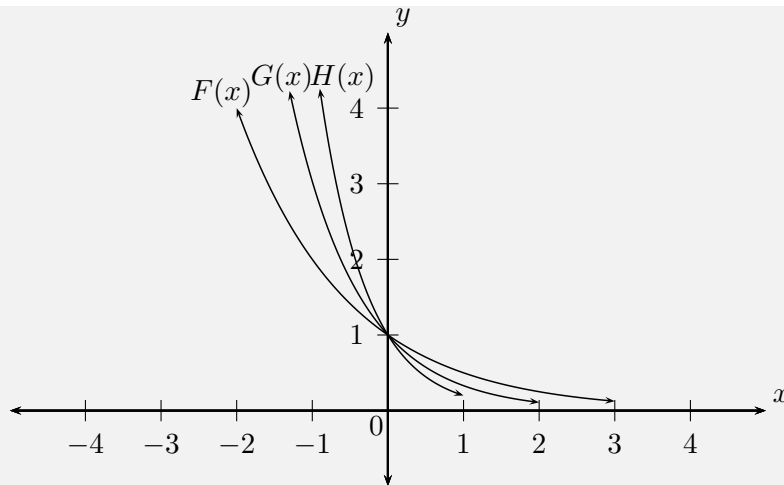
	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x) = 5^x$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

	-2	-1	0	1	2
$F(x) = (\frac{1}{2})^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$G(x) = (\frac{1}{3})^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$H(x) = (\frac{1}{5})^x$	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$

Stap 2 : Stip die punte en verbind hulle met 'n gladde kromme



1. Ons sien al die grafieke gaan deur die punt $(0; 1)$. Enige getal tot die mag 0 is gelyk aan 1.
2. Die grafieke sny nie die x -as nie omdat 0^0 ongedefinieerd is.
3. Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.
Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$.
4. As x toeneem, neem $h(x)$ toe.
5. $f(x) = 2^x$ neem teen die stadigste tempo toe omdat dit die kleinste grondtal het.
6. Waar: hoe groter k ($k > 1$), hoe steiler die grafiek $y = k^x$.



7. Die y -afsnitte is die punt $(0; 1)$ vir al die grafieke. Vir enige reële getal z , $z^0 = 1$.
8. $F(x)$ is die spieëlbeeld (refleksie) van $f(x)$ in die y -as.
9. $G(x)$ is die spieëlbeeld (refleksie) van $g(x)$ in die y -as.
10. Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
 Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$.
11. Waar: hoe groter y ($k > 1$), hoe steiler die grafiek van $y = (\frac{1}{k})^x$.
12. Die vergelyking van die horisontale asimptoot is $y = 0$, die x -as.

Funksies van die vorm $y = ab^x + q$



Onderzoek:

Die invloed van a en q op die eksponentgrafiek

Op dieselfde assestelsel, skets die volgende grafieke ($b = 2$, $a = 1$ en q verander):

1. $y_1 = 2^x - 2$
2. $y_2 = 2^x - 1$
3. $y_3 = 2^x$
4. $y_4 = 2^x + 1$
5. $y_5 = 2^x + 2$

	-2	-1	0	1	2
$y_1 = 2^x - 2$					
$y_2 = 2^x - 1$					
$y_3 = 2^x$					
$y_4 = 2^x + 1$					
$y_5 = 2^x + 2$					

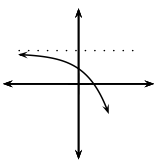
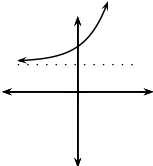
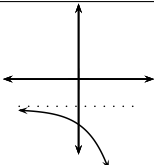
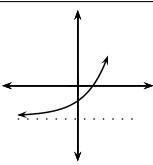
Gebruik jou antwoorde om 'n gevolgtrekking te maak ten opsigte van die invloed van q .

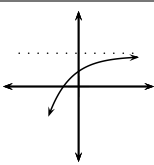
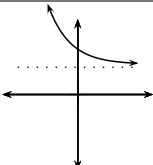
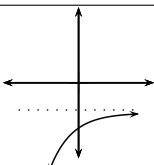
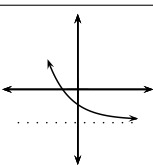
Op dieselfde assestelsel, skets die volgende grafieke ($b = 2$, $q = 0$ en a verander):

6. $y_6 = 2^x$
7. $y_7 = 2 \times 2^x$
8. $y_8 = -2^x$
9. $y_9 = -2 \times 2^x$

	-2	-1	0	1	2
$y_6 = 2^x$					
$y_7 = 2 \times 2^x$					
$y_8 = -2^x$					
$y_9 = -2 \times 2^x$					

Gebruik jou antwoorde om 'n gevolgtrekking te maak ten opsigte van die invloed van a .

$b > 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

$0 < b < 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

Die invloed van q

Jy sou gevind het dat die waarde van q 'n vertikale skuif veroorsaak omdat alle punte dieselfde afstand in dieselfde rigting beweeg, dus die hele grafiek skuif op of af.

- As $q > 0$, skuif die grafiek q eenhede vertikaal op.
- As $q < 0$, skuif die grafiek q eenhede vertikaal af.

Die horisontale asimptoot skuif q eenhede en is die lyn $y = q$.

Die invloed van a

Jy sou gevind het dat die waarde van a bepaal die vorm van die grafiek.

- Indien $a > 0$, dan sal die grafiek opwaarts buig.
- If $a < 0$, dan sal die grafiek afwaarts buig. Die twee grafieke is spieëlbeelde van mekaar rondom die horisontale asimptoot.

Ontdek die kenmerke



Die standaardvorm van die eksponentgrafiek is $y = ab^x + q$.

Definisieversameling en waardeversameling

Die funksie $y = ab^x + q$ is gedefinieer vir alle reële waardes van x . Dus is die definisieversameling $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Die waardeversameling van $y = ab^x + q$ word bepaal deur die teken van a .

Indien $a > 0$ dan:

$$\begin{aligned}b^x &> 0 \\ab^x &> 0 \\ab^x + q &> q \\f(x) &> q\end{aligned}$$

Dus, as $a > 0$, dan is die waardeversameling $\{f(x) : f(x) > q\}$.

Indien $a < 0$ dan:

$$\begin{aligned}b^x &< 0 \\ab^x &< 0 \\ab^x + q &< q \\f(x) &< q\end{aligned}$$

Dus, as $a < 0$, dan is die waardeversameling $\{f(x) : f(x) < q\}$.

Voorbeeld 13: Definisie- en waardeversameling van 'n eksponentfunksie

PROBLEEM

Vind die definisieversameling en waardeversameling van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$

OPLOSSING

Stap 1 : Vind die definisieversameling

Die definisieversameling van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Stap 2 : Vind die waardeversameling

$$2^x > 0$$

$$5 \times 2^x > 0$$

$$5 \times 2^x + 1 > 1$$

Dus is die waardeversameling $\{g(x) : g(x) > 1\}$.

Afsnitte
Die y -afsnit:

Die y -afsnit word gegee deur $x = 0$:

$$y = ab^x + q$$

$$y = ab^0 + q$$

$$= a(1) + q$$

$$= a + q$$

Byvoorbeeld, die y -afsnit van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ word gegee deur $x = 0$ te stel, om dan te kry:

$$\begin{aligned}y &= 5 \times 2^x + 1 \\&= 5 \times 2^0 + 1 \\&= 5 + 1 \\&= 6\end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 6)$.

Die x -afsnit:

Die x -afsnitte word bereken deur $y = 0$ te stel.

Byvoorbeeld, die x -afsnit van $g(x) = 5 \times 2^x + 1$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned}y &= 5 \times 2^x + 1 \\0 &= 5 \times 2^x + 1 \\-1 &= 5 \times 2^x \\2^x &= -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Dit het nie 'n reële oplossing nie. Dus het die grafiek $g(x)$ geen x -afsnitte nie.

Asimptote

Daar is een asimptoot vir funksies van die vorm $y = ab^x + q$. Die horisontale asimptoot lê by $x = q$.

Skets grafieke van die vorm $y = ab^x + q$ 

Om grafieke van funksies van die vorm $f(x) = ab^x + q$ te skets, moet ons die volgende eienskappe in ag neem:

1. teken en waarde van a
2. waarde van q
3. y -afsnit
4. x -afsnit
5. asimptote

Voorbeeld 14: Skets die grafiek van 'n eksponentfunksie

PROBLEEM

Skets die grafiek van $g(x) = 3 \times 2^x + 2$. Merk die afsnitte en asimptote.

OPLOSSING
Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking

Ons sien $a > 1$, dus buig die kromme opwaarts. $q > 0$ dus word die grafiek 2 eenhede vertikale opgeskuif.

Stap 2 : Bereken die afsnitte

Ons kry die y -afsnit waar $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 2^x + 2 \\ &= 3 \times 2^0 + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 5)$.

Ons kry die x -afsnit waar $y = 0$:

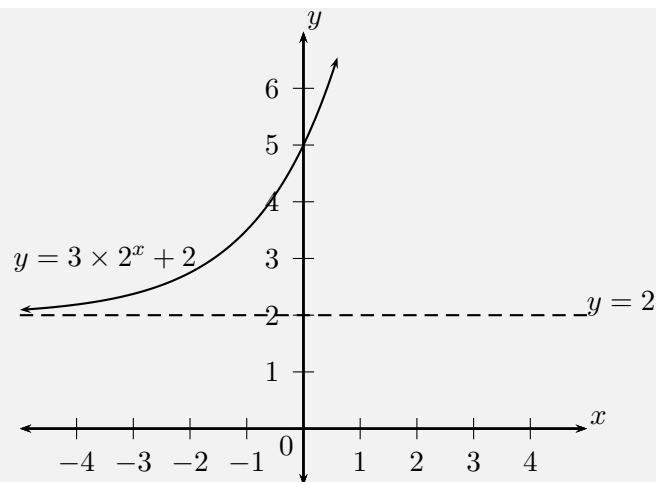
$$\begin{aligned} y &= 3 \times 2^x + 2 \\ 0 &= 3 \times 2^x + 2 \\ -2 &= 3 \times 2^x \\ 2^x &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Daar is geen reële oplossing nie, dus is daar geen x -afsnitte nie.

Stap 3 : Bepaal die asimptoot

Die lyn $y = 2$ is die horisontale asimptoot.

Stap 4 : Stip die punte en skets die grafiek



Definisieversameling: $\{x \in \mathbb{R}\}$.

Waardeversameling: $\{g(x) : g(x) > 2\}$.

Eksponentgrafieke het geen simmetrie asse nie.

Voorbeeld 15: Skets 'n eksponensiële grafiek

PROBLEEM

Skets die grafiek van $y = -2 \times 3^x + 6$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking**

$a < 0$ dus buig die grafiek af. $q > 0$ dus skuif die grafiek 6 eenhede vertikaal opwaarts.

Stap 2 : **Bereken die afsnitte**

Ons kry die y -afsnit waar $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -2 \times 3^x + 6 \\ &= -2 \times 3^0 + 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 4)$.

Ons kry die x -afsnit waar $y = 0$:

$$y = -2 \times 3^x + 6$$

$$0 = -2 \times 3^x + 6$$

$$-6 = -2 \times 3^x$$

$$3^1 = 3^x$$

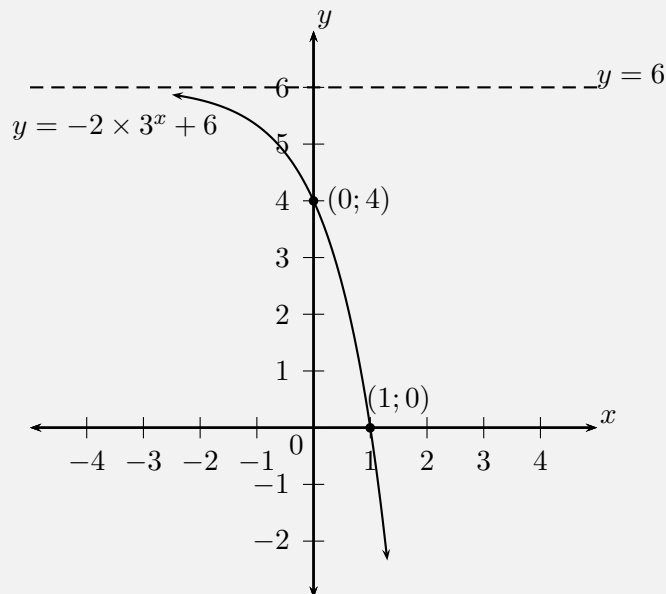
$$\therefore x = 1$$

Dit gee die punt $(1; 0)$.

Stap 3 : Bepaal die asimptoot

Funksies van hierdie vorm het een asimptoot. Dit lê by $y = q$, dus by $y = 6$.

Stap 4 : Stip die punte en skets die grafiek

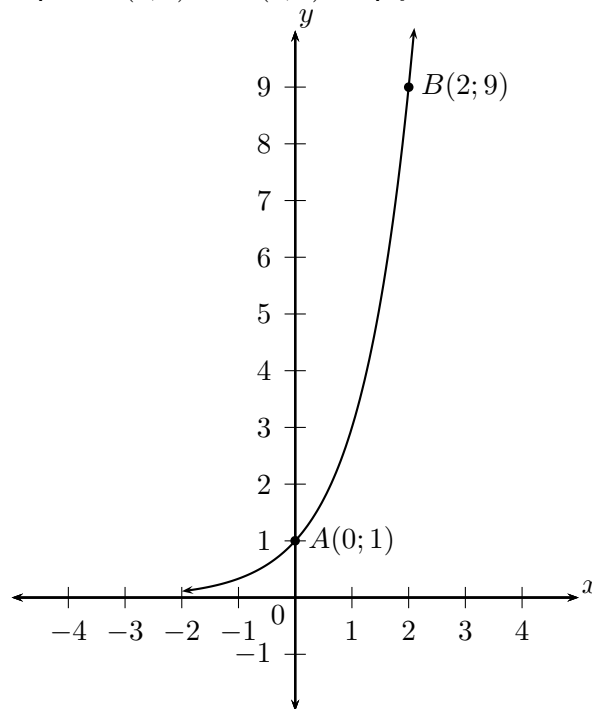


Definisieversameling: $\{x \in \mathbb{R}\}$

Waardeversameling: $\{g(x) : g(x) < 6\}$

Oefening 5 - 5

1. Skets die grafieke van $y = 2^x$ en $y = (\frac{1}{2})^x$ op dieselfde assestelsel.
 - (a) Is die x -as die asimptoot en/of simmetrie-as in albei grafieke? Verduidelik jou antwoord.
 - (b) Watter grafiek word aangedui met vergelyking $y = 2^{-x}$? Verduidelik jou antwoord.
 - (c) Los op die vergelyking $2^x = (\frac{1}{2})^x$ met behulp van 'n skets en kontroleer jou antwoord deur middel van substitusie.
2. Die kurwe van die eksponensiële funksie f in die meegaande diagram sny die y -as by die punt $A(0; 1)$ en $B(2; 9)$ is op f .



- (a) Bepaal die vergelyking van funksie f .
- (b) Bepaal die vergelyking van h , die refleksie van die kurwe van f in die x -as.
- (c) Bepaal die waardeversameling van h .
- (d) Bepaal die vergelyking van g , die refleksie van die kurwe van f in die y -as.
- (e) Bepaal die vergelyking van j indien j 'n vertikale strekking is van f met $+2$ eenhede.
- (f) Bepaal die vergelyking van k indien k 'n vertikale skuif is van f met -3 eenhede.

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02mk (2.) 02mm

5.6 Trigonometriese funksies

 EMDBP

Hierdie afdeling beskryf die grafieke van trigonometriese funksies.

 Video: VMazc by www.everythingmaths.co.za

Sinusfunksie

 EMDBQ

Funksies van die vorm $y = \sin \theta$

 EMDBR

Voorbeeld 16: Trek die grafiek van 'n sinusfunksie

PROBLEEM

$$y = f(\theta) = \sin \theta \quad [0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ]$$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi.

Kies 'n geskikte skaal en stip die waardes van θ op die x -as en van $\sin \theta$ op die y -as. Rond die antwoorde af tot 2 desimale plekke.

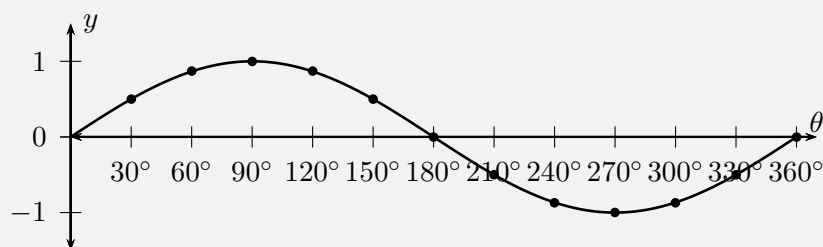
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin \theta$													

OPLOSSING

Stap 1 : **Stel waardes van θ in**

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin \theta$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

Stap 2 : **Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme**



Let op die golf vorm van die grafiek. Elke golf neem 360° om te voltooi. Dit staan bekend as die periode. Die hoogte van die golf bo en onder die x -as staan bekend as die amplitude van die grafiek. Die maksimumwaarde van $y = \sin \theta$ is 1 en die minimumwaarde is -1 .

Definisieversameling: $[0^\circ; 360^\circ]$

Waardeversameling: $[-1; 1]$

x -afsnitte: $(0^\circ; 0)$, $(180^\circ; 0)$, $(360^\circ; 0)$

y -afsnit: $(0^\circ; 0)$

Maksimum draaipunt: $(90^\circ; 1)$

Minimum draaipunt: $(270^\circ; -1)$

Funksies van die vorm $y = a \sin \theta + q$


Onderzoek:

Die invloed van a en q op die sinusgrafiek

In die vergelyking $y = a \sin \theta + q$, is a en q konstantes wat verskillende invloede op die grafiek het.

Op dieselfde stel asse, trek die volgende grafieke vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

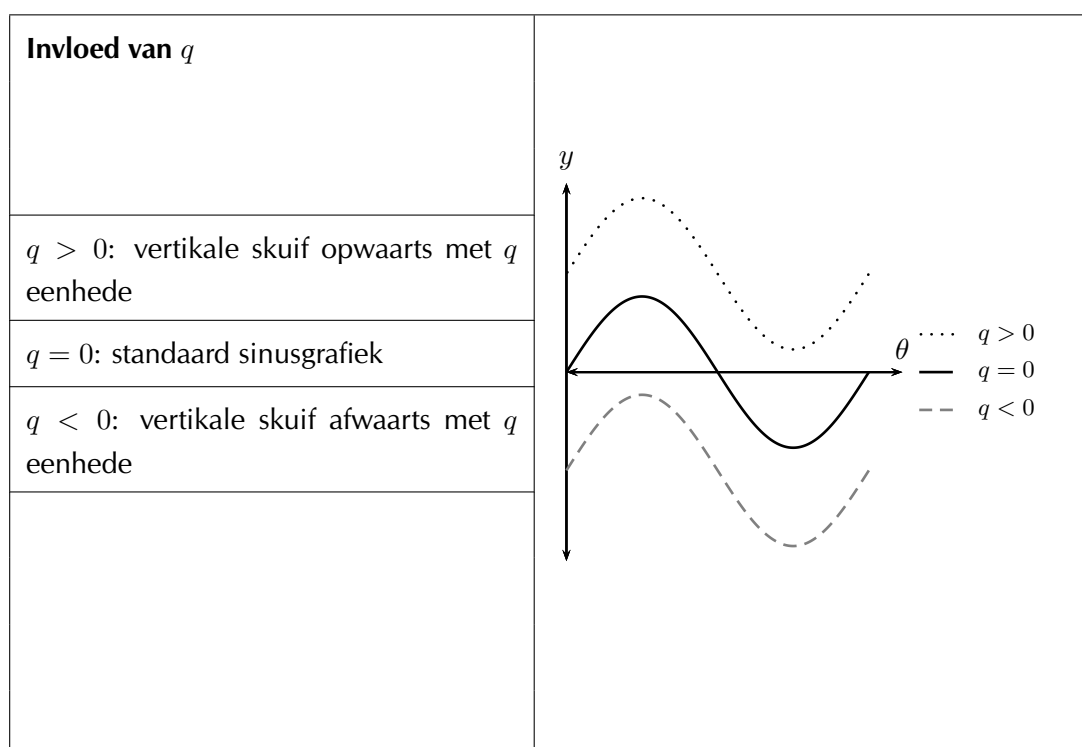
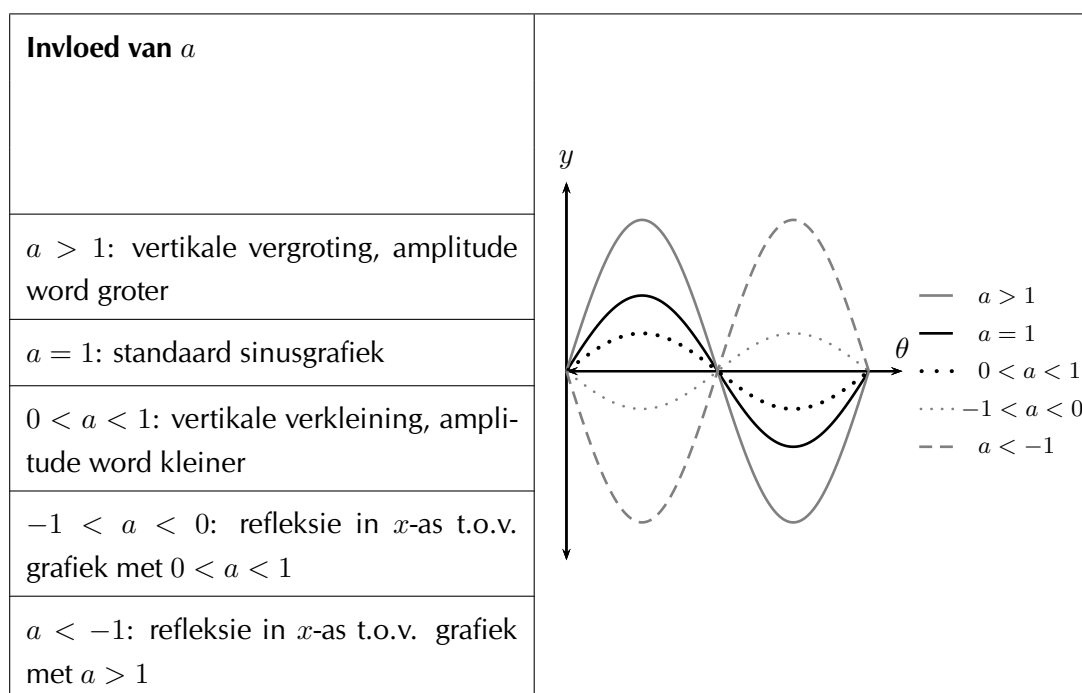
1. $y_1 = \sin \theta - 2$
2. $y_2 = \sin \theta - 1$
3. $y_3 = \sin \theta$
4. $y_4 = \sin \theta + 1$
5. $y_5 = \sin \theta + 2$

Gebruik jou resultate om afleidings te maak oor die invloed van q .

Trek grafieke van die volgende op dieselfde stel asse vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

6. $y_6 = -2 \sin \theta$
7. $y_7 = -\sin \theta$
8. $y_8 = \sin \theta$
9. $y_9 = 2 \sin \theta$

Gebruik jou resultate om die invloed van a af te lei.



Die invloed van q

Die invloed van q staan bekend as 'n vertikale skuif omdat die hele sinusgrafiek q eenhede opwaarts of afwaarts skuif.

- Indien $q > 0$, skuif die grafiek q eenhede opwaarts.
- Indien $q < 0$, skuif die grafiek q eenhede afwaarts.

Die invloed van a

Die waarde van a bepaal die amplitude van die grafiek; die hoogte van die pieke en die diepte van die trôe.

- Vir $a > 1$, is daar 'n vertikale vergroting en die amplitude groter word.
Vir $0 < a < 1$, word die amplitude kleiner.
- Vir $a < 0$, is daar 'n refleksie in die x -as.
Vir $-1 < a < 0$, is daar 'n refleksie in die x -as en die amplitude word kleiner.
Vir $a < -1$, is daar 'n refleksie in die x -as en die amplitude word groter.

Let op dat amplitude altyd positief is.

Ontdek die kenmerke



Definisieversameling en waardeversameling

Vir die funksie $f(\theta) = a \sin \theta + q$, is die definisieversameling $[0^\circ; 360^\circ]$.

Die waardeversameling van $f(\theta) = a \sin \theta + q$ hang af van die waardes van a en q .

As $a > 0$:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \theta \leq 1 \\ -a &\leq a \sin \theta \leq a \\ -a + q &\leq a \sin \theta + q \leq a + q \\ -a + q &\leq f(\theta) \leq a + q \end{aligned}$$

Dit vertel ons dat vir alle waardes van θ , is $f(\theta)$ altyd tussen $-a + q$ en $a + q$.

Daarom, as $a > 0$, sal die waardeversameling $\{f(\theta) : f(\theta) \in [a + q, -a + q]\}$ wees.

Ingelyks kan daar getoon word dat as $a < 0$, sal die waardeversameling

$\{f(\theta) : f(\theta) \in [a + q, -a + q]\}$.

Periode

Die periode van $y = a \sin \theta + q$ is 360° . Dit beteken dat een sinusgolf in 360° voltooi word.

Afsnitte

Die y -afsnit van $f(\theta) = a \sin \theta + q$ is die waarde van $f(\theta)$ by $\theta = 0^\circ$.

$$\begin{aligned} y &= f(0^\circ) \\ &= a \sin 0^\circ + q \\ &= a(0) + q \\ &= q \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; q)$.

Belangrik: wanneer jy sinusgrafieke skets, begin altyd met die standaard sinusgrafiek en beskou dan die invloede van a en q .

Voorbeeld 17: Skets die grafiek van 'n sinus funksie

PROBLEEM

Skets die grafiek van $f(\theta) = 2 \sin \theta + 3$ as $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

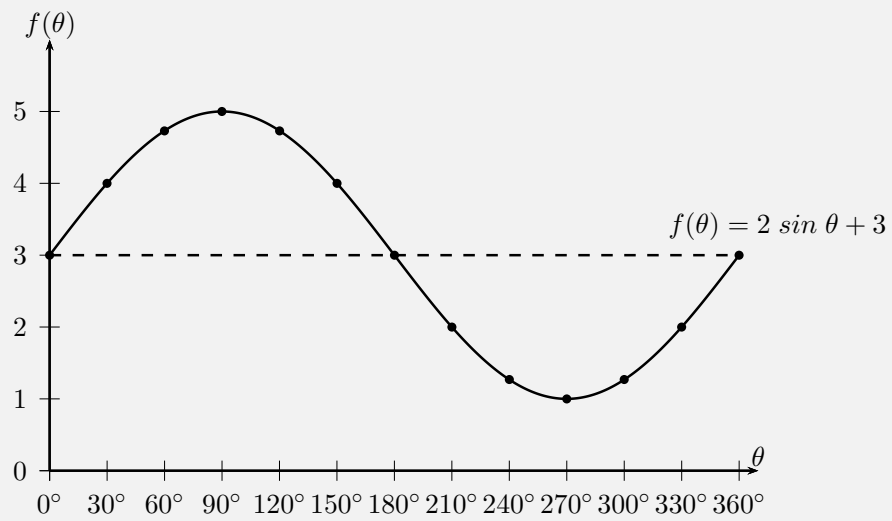
OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking**

Vanaf die vergelyking sien ons dat $a > 1$, dus word die grafiek vertikaal vergroot. Ons sien ook dat $q > 0$, dus skuif die grafiek opwaarts met 3 eenhede.

Stap 2 : Stel waardes vir θ in

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(\theta)$	3	4	4,73	5	4,73	4	3	2	1,27	1	1,27	2	3

Stap 3 : **Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme**



Definisieversameling: $[0^\circ; 360^\circ]$

Waardeversameling: $[1; 5]$

x -afsnitte: geen

y -afsnit: $(0^\circ; 3)$

Maksimum draaipunt: $(90^\circ; 5)$

Minimum draaipunt: $(270^\circ; 1)$

Cosinusfunksie



Funksies van die vorm $y = \cos \theta$



Voorbeeld 18: Trek die grafiek van 'n cosinusfunksie

PROBLEEM

$$y = f(\theta) = \cos \theta \quad [0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ]$$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi.

Kies 'n geskikte skaal en stip die waardes van θ op die x -as en $\cos \theta$ op die y -as.

Rond die antwoorde af tot 2 desimale plekke.

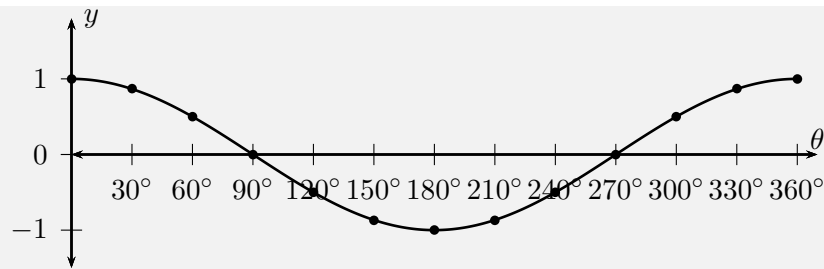
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos \theta$													

OPLOSSING

Stap 1 : **Stel waardes vir θ in**

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos \theta$	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1

Stap 2 : **Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme**



Let op die golfvorm van die grafiek is soortgelyk aan die sinusgrafiek. Die periode is ook 360° en die amplitude is 1. Die maksimum waarde van $y = \cos \theta$ is 1 en die minimum waarde is -1 .

Definisieversameling: $[0^\circ; 360^\circ]$

Waardeversameling: $[-1; 1]$

x -afsnitte: $(90^\circ; 0)$, $(270^\circ; 0)$

y -afsnit: $(0^\circ; 1)$

Maksimum draaipunt: $(0^\circ; 1)$, $(360^\circ; 1)$

Minimum draaipunt: $(180^\circ; -1)$

Funksies van die vorm $y = a \cos \theta + q$



Onderzoek:

Die invloed van a en q op die cosinusgrafiek

In die vergelyking, $y = a \cos \theta + q$, is a en q konstantes wat verskillende invloede het op die grafiek.

Trek grafieke van die volgende op dieselfde stel asse vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

1. $y_1 = \cos \theta - 2$
2. $y_2 = \cos \theta - 1$
3. $y_3 = \cos \theta$
4. $y_4 = \cos \theta + 1$
5. $y_5 = \cos \theta + 2$

Gebruik jou resultate om die invloed van q af te lei.

Trek grafieke van die volgende op dieselfde stel asse vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

6. $y_6 = -2 \cos \theta$
7. $y_7 = -\cos \theta$
8. $y_8 = \cos \theta$

9. $y_9 = 2 \cos \theta$

Gebruik jou resultate om die invloed van a af te lei.

Invloed van a	
$a > 1$: vertikale vergroting, amplitude word groter	
$a = 1$: standaard cosinusgrafiek	
$0 < a < 1$: amplitude word kleiner	
$-1 < a < 0$: refleksie in die x -as, amplitude word kleiner	
$a < -1$: refleksie in die x -as, amplitude word groter	

Invloed van q	
$q > 0$: vertikale skuif opwaarts met q eenhede	
$q = 0$: standaard cosinusgrafiek	
$q < 0$: vertikale skuif afwaarts met q eenhede	

Die invloed van q

Die invloed van q staan bekend as 'n vertikale skuif omdat die hele cosinusgrafiek q eenhede opwaarts of afwaarts skuif.

- Indien $q > 0$, skuif die grafiek q eenhede opwaarts.
- Indien $q < 0$, skuif die grafiek q eenhede afwaarts.

Die invloed van a

Die waarde van a bepaal die amplitude van die grafiek; die hoogte van die pieke en die diepte van die trôe.

- Vir $a > 1$, is daar 'n vertikale vergroting en die amplitude groter word.
Vir $0 < a < 1$, word die amplitude kleiner.
- Vir $a < 0$, is daar 'n refleksie in die x -as.
Vir $-1 < a < 0$, is daar 'n refleksie in die x -as en die amplitude word kleiner. Vir $a < -1$, is daar 'n refleksie in die x -as en die amplitude word groter.

Let op dat amplitude altyd positief is.

Ontdek die kenmerke**Definisieversameling en waardeversameling**

Vir $f(\theta) = a \cos \theta + q$, is die definisieversameling $[0^\circ; 360^\circ]$.

Dit is maklik om te sien dat die waarde versameling van $f(\theta)$ dieselfde sal wees as die waardeversameling van $a \sin(\theta) + q$. Dit is omdat die maksimum- en minimumwaardes van $a \cos(\theta) + q$ dieselfde is as die maksimum- en minimumwaardes van $a \sin(\theta) + q$.

As $a > 0$, is die waardeversameling $\{f(\theta) : f(\theta) \in [-a + q; a + q]\}$.

As $a < 0$, is die waardeversameling $\{f(\theta) : f(\theta) \in [a + q; -a + q]\}$.

Periode

Die periode van $y = a \cos \theta + q$ is 360° . Dit beteken dat een cosinusgolf in 360° voltooi word.

Afsnitte

Die y -afsnit van $f(\theta) = a \cos \theta + q$ word bereken op dieselfde manier as vir sinus.

$$\begin{aligned}
 y &= f(0^\circ) \\
 &= a \cos 0^\circ + q \\
 &= a(1) + q \\
 &= a + q
 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0^\circ; a + q)$.

Voorbeeld 19: Skets die grafiek van 'n cosinusfunksie

PROBLEEM

Skets die grafiek van $f(\theta) = 2 \cos \theta + 3$ as $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

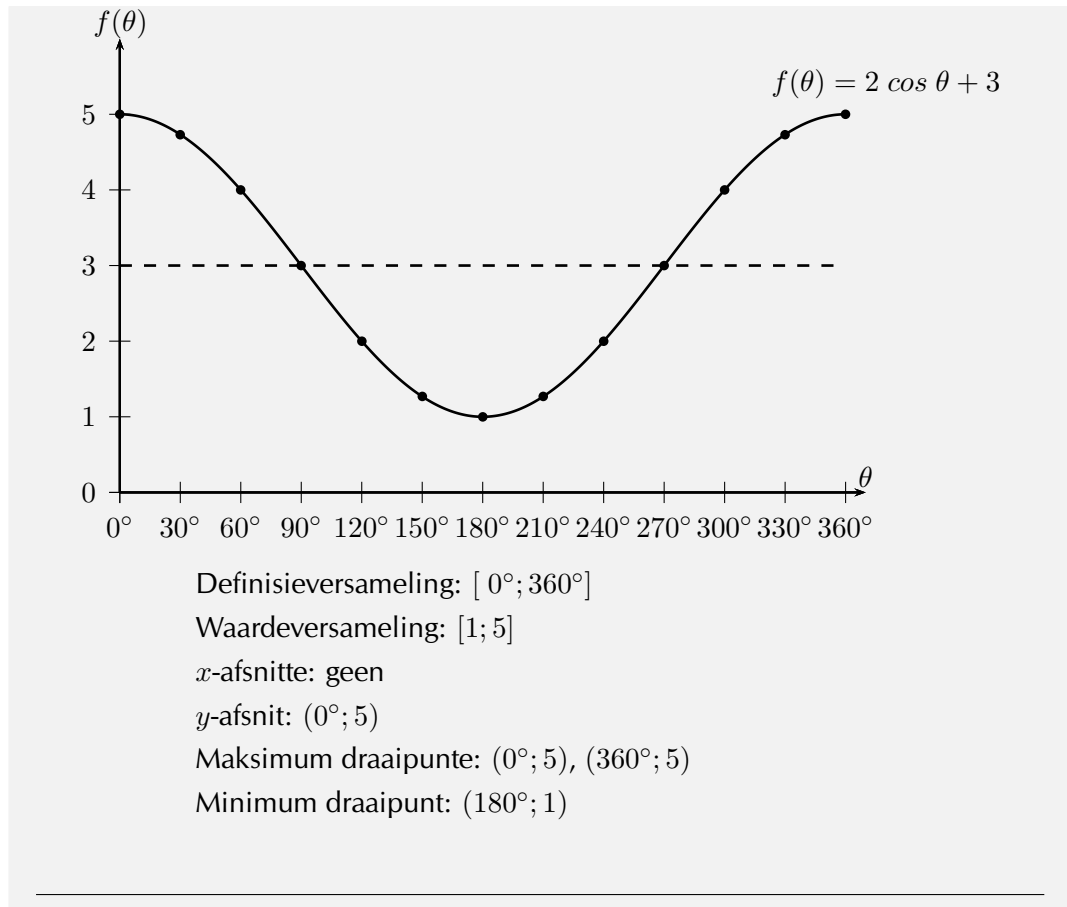
OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking**

Vanaf die vergelyking sien ons dat $a > 1$, dus word die grafiek vertikaal vergroot. Ons sien ook dat $q > 0$, dus skuif die grafiek opwaarts met 3 eenhede.

Stap 2 : Stel waardes vir θ in

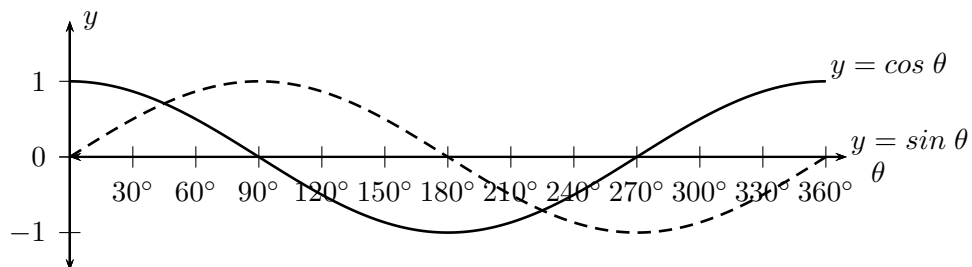
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(\theta)$	5	4,73	4	3	2	1,27	1	1,27	2	3	4	4,73	5

Stap 3 : Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme



Vergelyk die grafieke van $y = \sin \theta$ en $y = \cos \theta$

EMDBY



Let daarop dat die twee grafieke baie eenders lyk. Beide ossilleer op en af rondom die x -as soos wat jy langs die as beweeg. Die afstande tussen die pieke van die twee grafieke is dieselfde en is konstant vir elke grafiek. Die hoogte van elke piek en die diepte van elke trog is dieselfde.

Die enigste verskil is dat die $\sin$ grafiek 90° na regs skuif ten opsigte van die $\cos$ grafiek. Dit beteken dat as ons die hele $\cos$ grafiek 90° na regs skuif, sal dit perfek oorvleuel met die $\sin$ grafiek. Jy kan ook die $\sin$ grafiek 90° na links skuif en dan sal dit perfek oorvleuel met die $\cos$ grafiek. Dit beteken dat:

$$\sin \theta = \cos (\theta - 90^\circ) \quad (\text{skuif die grafiek na die regterkant})$$

$$\cos \theta = \sin (\theta + 90^\circ) \quad (\text{skuif die grafiek na die linkerkant})$$

Tangensfunksie



Funksies van die vorm $y = \tan \theta$



Voorbeeld 20: Trek die grafiek van 'n tangensfunksie

PROBLEEM

$$y = f(\theta) = \tan \theta \quad [0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ]$$

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi. Kies 'n geskikte skaal en stip die waarde van θ op die x -as en $\tan \theta$ op die y -as. Rond die antwoorde af tot 2 desimale plekke.

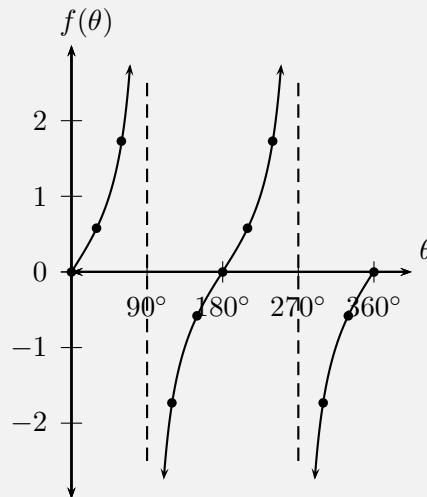
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\tan \theta$													

OPLOSSING

Stap 1 : **Stel waardes van θ in**

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\tan \theta$	0	0,58	1,73	ongedf	-1,73	-0,58	0	0,58	1,73	ongedf	-1,73	-0,58	0

Stap 2 : **Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme**



Daar is 'n maklik manier om die tangens grafiek te visualiseer. Beskou die definisies van $\sin \theta$ and $\cos \theta$ vir reghoekige driehoeke.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}}{\frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \tan \theta$$

Dus, vir enige waarde van θ :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Ons weet dat vir die waardes van θ waarvoor $\sin \theta = 0$, moet $\tan \theta = 0$. Verder, as $\cos \theta = 0$ sal die waarde van $\tan \theta$ ongedefinieerd wees want ons kan nie deur 0 deel nie. Die vertikale stippellyne lê by die waardes van θ waarvoor $\tan \theta$ nie gedefinieer is, en word die asimptote genoem.

Asimptote: die lyne $\theta = 90^\circ$ en $\theta = 270^\circ$

Periode: 180°

Definisieversameling: $\{\theta : 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \theta \neq 90^\circ; 270^\circ\}$

Waardeversameling: $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$

x -afsnitte: $(0^\circ; 0), (180^\circ; 0), (360^\circ; 0)$

y -afsnit: $(0^\circ; 0)$

Funksies van die vorm $y = a \tan \theta + q$

**Onderzoek:**Die invloed van a en q op 'n tangensgrafiek

Op dieselfde assestelsel, trek die volgende grafieke, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

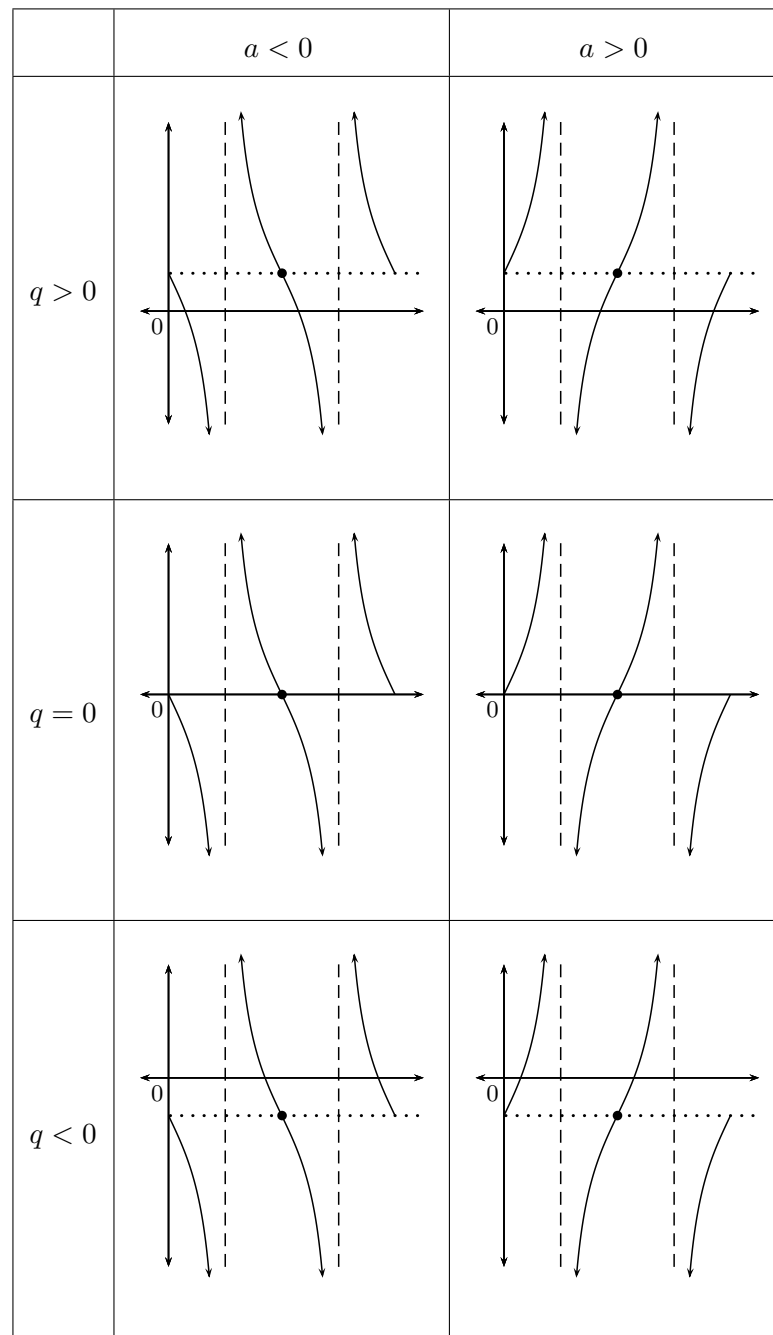
1. $y_1 = \tan \theta - 2$
2. $y_2 = \tan \theta - 1$
3. $y_3 = \tan \theta$
4. $y_4 = \tan \theta + 1$
5. $y_5 = \tan \theta + 2$

Gebruik jou resultate om die invloed van q af te lei.

Op dieselfde assestelsel, trek die volgende grafieke, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

6. $y_6 = -2 \tan \theta$
7. $y_7 = -\tan \theta$
8. $y_8 = \tan \theta$
9. $y_9 = 2 \tan \theta$

Gebruik jou resultate om die invloed van a af te lei.



Die invloed van q

Die invloed van q staan bekend as 'n vertikale skuif omdat die hele tangensgrafiek q eenhede opwaarts of afwaarts skuif.

- Vir $q > 0$, skuif die grafiek q eenhede opwaarts.
- Vir $q < 0$, skuif die grafiek q eenhede afwaarts.

Die invloed van a

Die waarde van a beïnvloed die helling van elke segment van die grafiek; hoe groter die waarde van a , hoe vinniger sal die segmente van die grafiek die asimptote nader.

Ontdek die kenmerke



Definisieversameling en waardeversameling

Van die grafiek sien ons dat $\tan \theta$ ongedefinieer is by $\theta = 90^\circ$ en $\theta = 270^\circ$.

Dus is die definisieversameling $\{\theta : 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \theta \neq 90^\circ; 270^\circ\}$.

Die waardeversameling is $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Periode

Die periode van $y = a \tan \theta + q$ is 180° . Dit beteken dat een tangenssiklus in 180° voltooi word.

Afsnitte

Die y -afsnit van $f(\theta) = a \tan \theta + q$ is die waarde van $f(\theta)$ by $\theta = 0^\circ$.

$$\begin{aligned} y &= f(0^\circ) \\ &= a \tan 0^\circ + q \\ &= a(0) + q \\ &= q \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0^\circ; q)$.

Asimptote

Die grafiek het asimptote by $\theta = 90^\circ$ en $\theta = 270^\circ$.

Voorbeeld 21: Skets die grafiek van 'n tangensfunksie**PROBLEEM**

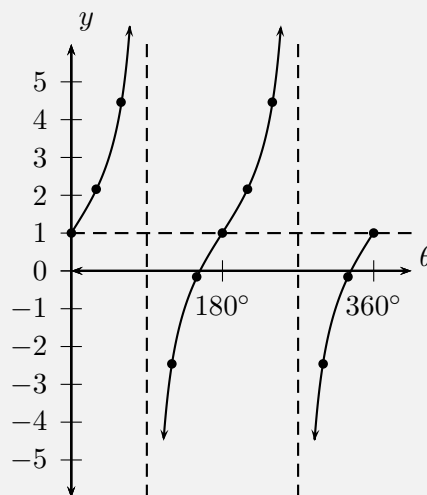
Skets die grafiek van $y = 2 \tan \theta + 1$ as $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

OPLOSSING**Stap 1 : Ondersoek die standaardvorm van die vergelyking**

Ons sien dat $a > 1$, dus sal die segmente van die kromme 'n groter helling hê. Ons sien ook dat $q > 0$, so die grafiek sal 1 eenhede vertikaal opskuif.

Stap 2 : Stel waardes van θ in

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	1	2,15	4,46	–	–2,46	–0,15	1	2,15	4,46	–	–2,46	–0,15	1

Stap 3 : Stip die punte en verbind met 'n gladde kromme

Definisieversameling: $\{\theta : 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \theta \neq 90^\circ; 270^\circ\}$.

Waardeversameling: $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Oefening 5 - 6

1. Deur jou kennis van die invloed van a en q te gebruik, skets elk van die volgende grafieke sonder om 'n tabel van waardes te gebruik, vir $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

(a) $y = 2 \sin \theta$

(b) $y = -4 \cos \theta$

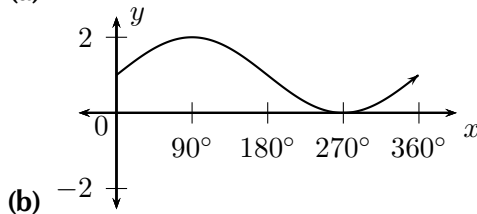
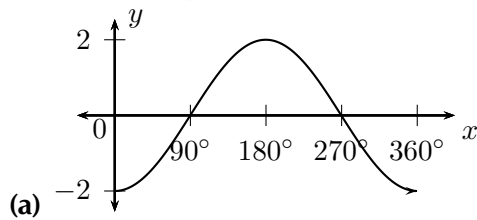
(c) $y = -2 \cos \theta + 1$

(d) $y = \sin \theta - 3$

(e) $y = \tan \theta - 2$

(f) $y = 2 \cos \theta - 1$

2. Gee die vergelykings van elk van die volgende grafieke:



A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

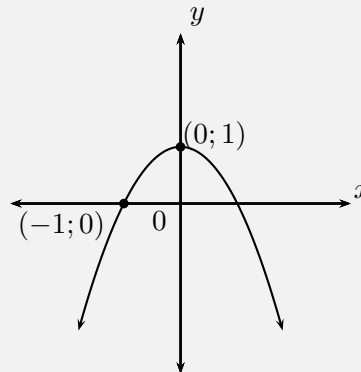
(1.) 02mn (2.) 02mp

5.7 Interpretasie van grafieke

Voorbeeld 22: Bepaal die vergelyking van 'n parabool

PROBLEEM

Gebruik die skets hieronder om die waardes van a en q vir die parabool van die vorme $y = ax^2 + q$ te bepaal.


OPLOSSING
Stap 1 : Beskou die skets

Van die skets af sien ons dat die grafiek 'n "frons"-vorm het, dus $a < 0$. Ons sien ook dat die grafiek vertikaal opwaarts geskuif is, dus $q > 0$

Stap 2 : Bereken q deur die y -afsnit te gebruik

Die y -afsnit is die punt $(0; 1)$.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ 1 &= a(0)^2 + q \\ \therefore q &= 1 \end{aligned}$$

Stap 3 : Gebruik die ander punt wat gegee is om a te bereken

Vervang die waarde van die punt $(-1; 0)$ in die vergelyking in:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ 0 &= a(-1)^2 + 1 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

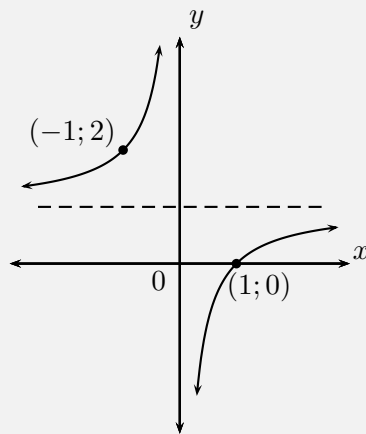
Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

$a = -1$ en $q = 1$, dus die vergelyking van die parabool is
 $y = -x^2 + 1$.

Voorbeeld 23: Bepaal die vergelyking van 'n hiperbool

PROBLEEM

Gebruik die skets hieronder om die waardes van a en q vir die hiperbool van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ te bepaal.



OPLOSSING

Stap 1 : **Beskou die skets**

Die twee krommes van die hiperbool lê in die tweede en vierde kwadrante, dus is $a < 0$. Ons sien ook dat die grafiek vertikaal opwaarts geskuif is, dus is $q > 0$.

Stap 2 : **Vervang die punte wat gegee is in die vergelyking in en los op**

Vervang die punt $(-1; 2)$ in:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} + q \\ 2 &= \frac{a}{-1} + q \\ \therefore 2 &= -a + q \end{aligned}$$

Vervang die punt $(1; 0)$ in:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} + q \\ 0 &= \frac{a}{1} + q \\ \therefore a &= -q \end{aligned}$$

Stap 3 : Los die vergelykings gelyktydig op deur vervanging te gebruik

$$\begin{aligned} 2 &= -a + q \\ &= q + q \\ &= 2q \\ \therefore q &= 1 \\ \therefore a &= -q \\ &= -1 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

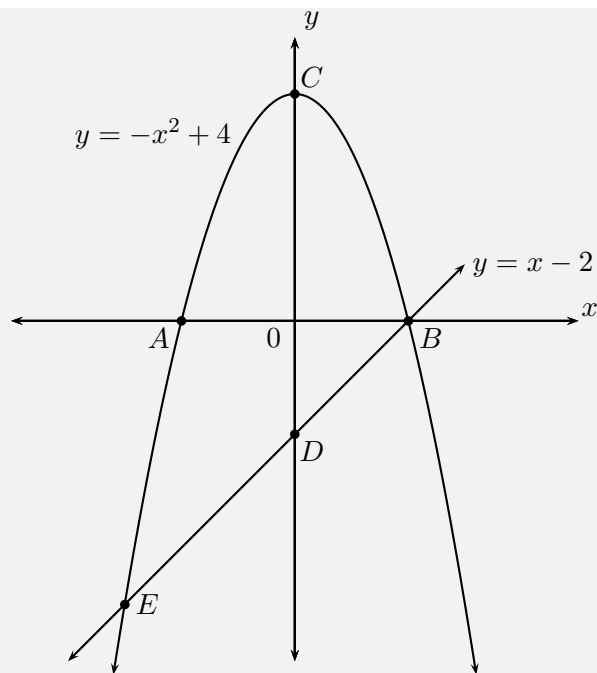
$a = -1$ en $q = 1$, dus is die vergelyking van die hiperbool
 $y = \frac{-1}{x} + 1$.

Voorbeeld 24: Interpretasie van grafieke

PROBLEEM

Die grafieke $y = -x^2 + 4$ en $y = x - 2$ is gegee. Bereken die volgende:

1. koördinate van A, B, C, D
2. koördinate van E
3. lengte van CD

**OPLOSSING****Stap 1 : Bereken die afsnitte**

Om die y -afsnit van die parabool te bereken, laat $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4 \\ &= -0^2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $C(0; 4)$.

Om die x -afsnit te bereken, laat $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4 \\ 0 &= -x^2 + 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x + 2)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $A(-2; 0)$ en $B(2; 0)$.

Om die y -afsnit van die reguitlyn te bereken, laat $x = 0$:

$$\begin{aligned}y &= x - 2 \\&= 0 - 2 \\&= -2\end{aligned}$$

Dit gee die punt $D(0; -2)$.

Om die x -afsnit te bereken, laat $y = 0$:

$$\begin{aligned}y &= x - 2 \\0 &= x - 2 \\x &= 2\end{aligned}$$

Dit gee die punt $B(2; 0)$.

Stap 2 : Bereken die snypunt E

By E sny die twee grafieke mekaar, so die twee uitdrukkings gelyk sal wees:

$$\begin{aligned}x - 2 &= -x^2 + 4 \\ \therefore x^2 + x - 6 &= 0 \\ \therefore (x - 2)(x + 3) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ of } -3\end{aligned}$$

By E , $x = -3$, dus $y = x - 2 = -3 - 2 = -5$.

Dit gee die punt $E(-3; -5)$.

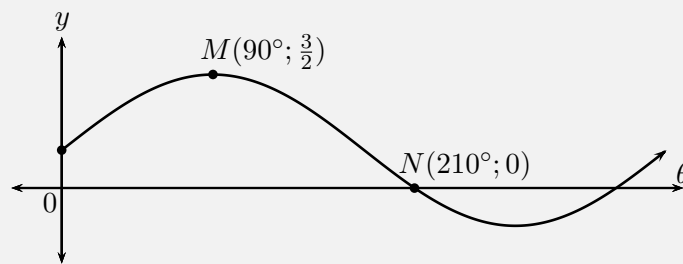
Stap 3 : Bereken lengte CD

$$\begin{aligned}CD &= CO + OD \\&= 4 + 2 \\&= 6\end{aligned}$$

Lengte CD is 6 eenhede.

Voorbeeld 25: Interpretasie van trigonometriese grafieke**PROBLEEM**

Gebruik die skets hieronder om die vergelyking van die trigonometriese funksie van die vorm $y = a f(\theta) + q$ te bepaal.

**OPLOSSING**

Stap 1 : **Beskou die skets**

Van die skets af sien ons dat die grafiek 'n sinusfunksie is wat vertikaal opgeskuif is. Die algemene vorm van die vergelyking is $y = a \sin \theta + q$.

Stap 2 : **Vervang die gegewe punte in die vergelyking in en los op**

By N , $\theta = 210^\circ$ en $y = 0$:

$$\begin{aligned} y &= a \sin \theta + q \\ 0 &= a \sin 210^\circ + q \\ &= a \left(-\frac{1}{2} \right) + q \\ \therefore q &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

By M , $\theta = 90^\circ$ en $y = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= a \sin 90^\circ + q \\ &= a + q \end{aligned}$$

Stap 3 : **Los die vergelykings gelyktydig op deur vervanging te gebruik**

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} &= a + q \\
 &= a + \frac{a}{2} \\
 3 &= 2a + a \\
 3a &= 3 \\
 \therefore a &= 1 \\
 \therefore q &= \frac{a}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

$$y = \sin \theta + \frac{1}{2}$$

Hoofstuk 5 | Opsomming

📌 Opsommingsaanbieding: VMdkf by www.everythingmaths.co.za

- Kenmerke van funksies:
 - Die gegewe of gekose x -waarde staan bekend as die onafhanklike veranderlike want die waarde van x kan vrylik gekies word. Die berekende y -waarde staan bekend as die afhanklike veranderlike aangesien die waarde van y afhang van die gekose waarde van x .
 - Die definisieversameling van 'n verband is die versameling van al die x waardes waarvoor daar ten minste een y waarde bestaan volgens die funksievoorskrif. Die waardeversameling is die versameling van al die y -waardes wat verkry kan word deur ten minste een van die x waardes te gebruik.
 - Die afsnit is die punt waar die grafiek 'n as sny. Die x -afsnit(te) is die punt(e) waar die grafiek die x -as sny en die y -afsnit(te) is die punt(e) waar die grafiek die y -as sny.
 - Vir grafieke van funksies met 'n hoogste mag van groter as 1, is daar twee tipes draaipunte: 'n minimum draaipunt en 'n maksimum draaipunt. 'n Minimum

draaipunt is 'n punt op die grafiek waar die grafiek ophou afneem in waarde en begin toeneem in waarde. 'n Maksimum draaipunt is 'n punt op die grafiek waar die grafiek ophou toeneem in waarde en begin afneem in waarde.

- 'n Asimptoot is 'n reguitlyn of kurwe wat die grafiek van 'n funksie sal nader, maar nooit sny of raak nie.
- 'n Grafiek is kontinu as daar geen onderbreking in die grafiek is nie.
- Jy moet die volgende funksies en hulle eienskappe ken:
 - Lineêre funksies van die vorm $y = ax + q$.
 - Paraboliese funksies van die vorm $y = ax^2 + q$.
 - Hiperboliese funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$.
 - Eksponeensiële funksies van die vorm $y = ab^x + q$.
 - Trigonometriese funksies van die vorm

$$y = a \sin \theta + q$$

$$y = a \cos \theta + q$$

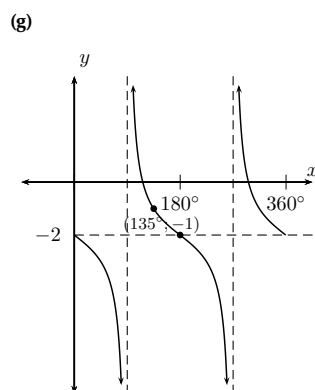
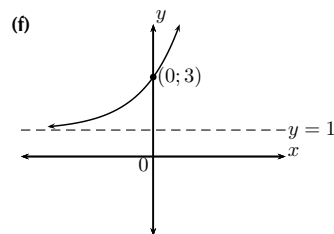
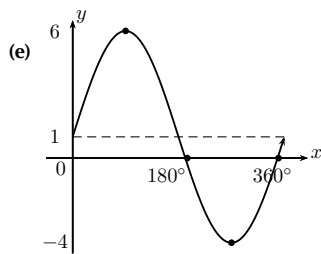
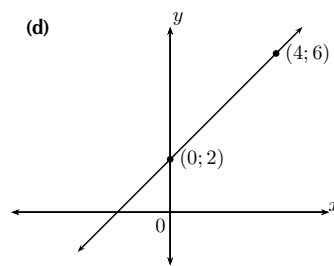
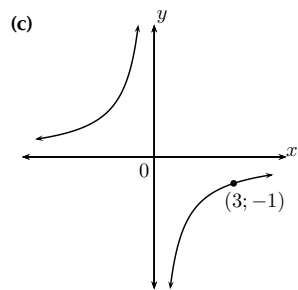
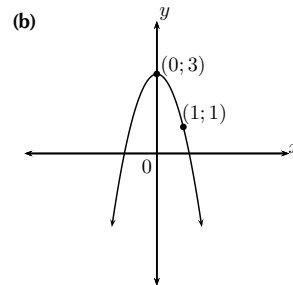
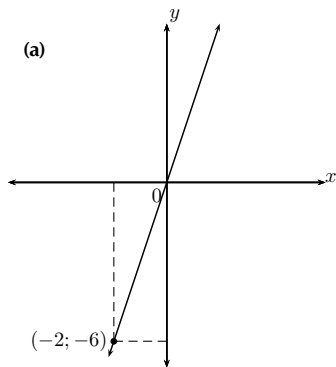
$$y = a \tan \theta + q$$

Hoofstuk 5

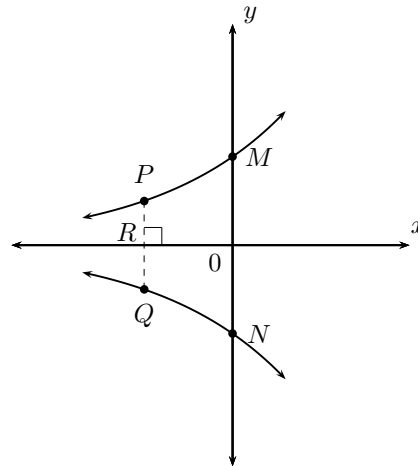
Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Skets die grafieke van die volgende:
 - (a) $y = 2x + 4$
 - (b) $y - 3x = 0$
 - (c) $2y = 4 - x$
2. Skets die volgende funksies:
 - (a) $y = x^2 + 3$
 - (b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$
 - (c) $y = 2x^2 - 4$
3. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:
 - (a) $y = 3^x + 2$
 - (b) $y = -4 \times 2^x$
 - (c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$
4. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:
 - (a) $y = \frac{3}{x} + 4$
 - (b) $y = \frac{1}{x}$
 - (c) $y = \frac{2}{x} - 2$
5. Bepaal of die volgende bewerings waar of vals is. As 'n bewering vals is, gee redes hoekom
 - (a) Die gegewe of gekose y-waarde staan bekend as die afhanklike veranderlike.

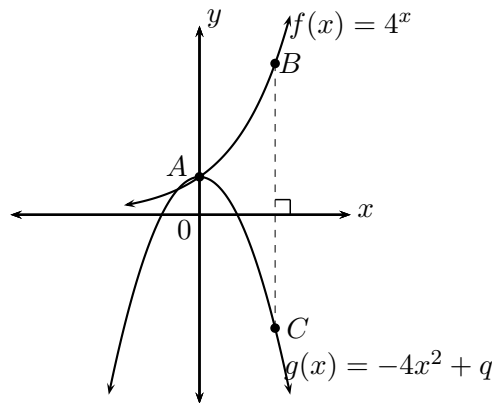
- (b) 'n Grafiek wat geen onderbrekings het nie, word kongruent genoem.
 - (c) Funksies van die vorm $y = ax + q$ is reguitlyne.
 - (d) Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is eksponensiële funksies.
 - (e) 'n Asimptoot is 'n reguit of gekromde lyn wat 'n grafiek ten minste een keer sny.
 - (f) Gegee die funksie in die vorm $y = ax + q$, word die y -afsnit gevind deur $x = 0$ te stel en op te los vir y .
6. Gegee die funksies $f(x) = 2x^2 - 6$ en $g(x) = -2x + 6$:
- (a) Skets f en g op dieselfde assestelsel.
 - (b) Bereken die snypunte van f en g .
 - (c) Gebruik nou die grafieke en hulle snypunte om vir x op te los wanneer:
 - i. $f(x) > 0$
 - ii. $g(x) < 0$
 - iii. $f(x) \leq g(x)$
 - (d) Gee die vergelyking van die refleksie van f in die x -as.
7. Nadat 'n bal laat val word, is die hoogte wat die bal terugbons elke keer minder. Die vergelyking $y = 5(0,8)^x$ toon die verwantskap tussen x , die nommer van die bons, en y , die hoogte van die bons vir 'n spesifieke bal. Wat is die benaderde hoogte van die vyfde bons tot die naaste tiende van 'n eenheid?
8. Mark het 15 muntstukke in R 5 en R 2-stukke. Hy het 3 meer R 2-stukke as R 5-stukke. Hy het 'n stelsel van vergelykings opgestel om die situasie te toon, waar x die aantal R 5-stukke voorstel en y die aantal R 2-stukke. Hy het vervolgens die probleem grafies opgelos.
- (a) Skryf die sisteem van vergelykings neer.
 - (b) Skets die grafieke op dieselfde assestelsel.
 - (c) Wat is die oplossing?
9. Skets die grafieke van die volgende trigonometries funksies as $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$. Wys die afsnitte en asimptote.
- (a) $y = -4 \cos \theta$
 - (b) $y = \sin \theta - 2$
 - (c) $y = -2 \sin \theta + 1$
 - (d) $y = \tan \theta + 2$
 - (e) $y = \frac{\cos \theta}{2}$
10. As die algemene vergelykings $y = mx + c$, $y = ax^2 + q$, $y = \frac{a}{x} + q$, $y = a \sin x + q$, $y = a^x + q$ en $y = a \tan x$ gegee is, bereken die spesifieke vergelykings vir elkeen van die volgende grafieke:



11. $y = 2^x$ en $y = -2^x$ is hieronder geskets. Antwoord die vrae wat volg:

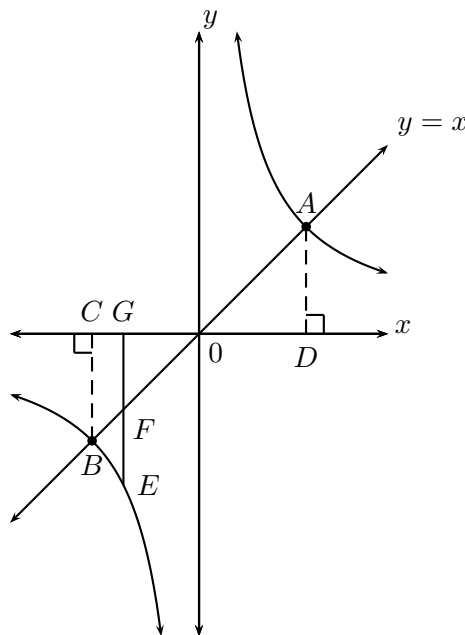


- Bereken die koördinate van M en N .
 - Bereken die lengte MN .
 - Bereken lengte van PQ as OR 1 eenheid is.
 - Gee die vergelyking as $y = 2^x$ weerspieël word in die y -as.
 - Gee die waardeversameling van elke grafiek.
12. $f(x) = 4^x$ en $g(x) = 4x^2 + q$ is hieronder geskets. Die punte $A(0;1)$, $B(1;4)$ is C gegee. Antwoord die vrae wat volg:



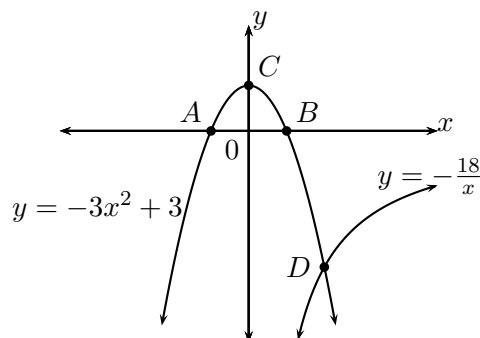
- Bepaal die waarde van q .
 - Bereken die lengte van BC .
 - Gee die vergelyking van $f(x)$ weerspieël in die x -as.
 - Gee die vergelyking van $f(x)$ 1 eenheid vertikaal opwaarts geskuif.
 - Gee die vergelyking van die asimptote van $f(x)$.
 - Gee die waardeversamelings van $f(x)$ en $g(x)$.
13. Skets die grafieke van $h(x) = x^2 - 4$ en $k(x) = -x^2 + 4$ op dieselfde assentelsel en antwoord die vrae wat volg:
- Beskryf die verhouding tussen h en k .
 - Gee die vergelyking van $k(x)$ weerspieël in die lyn $y = 4$.
 - Gee die definisieversameling en die waardeversameling van h .

14. Skets die grafieke van $f(\theta) = 2 \sin \theta$ en $g(\theta) = \cos \theta - 1$ op dieselfde assestelsel. Gebruik jou skets om te bepaal:
- (a) $f(180^\circ)$
 - (b) $g(180^\circ)$
 - (c) $g(270^\circ) - f(270^\circ)$
 - (d) Die definisieversameling en die waardeversameling van g .
 - (e) Die amplitude en periode van f .
15. Die grafieke van $y = x$ en $y = \frac{8}{x}$ word in die diagram getoon.



Bereken:

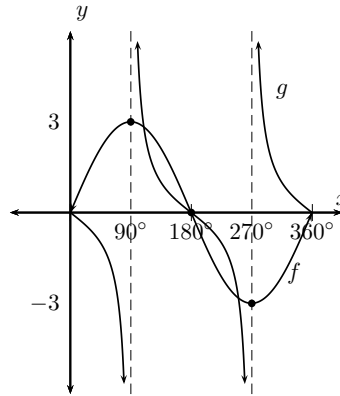
- (a) die koördinate van A en B .
 - (b) die lengte van CD .
 - (c) die lengte van AB .
 - (d) die lengte van EF , gegewe $G(-2; 0)$.
16. In die diagram word die skets van $y = -3x^2 + 3$ en $y = -\frac{18}{x}$ getoon.



- (a) Bereken die koördinate van A , B en C .

- (b) Beskryf in woorde wat gebeur by punt D .
 (c) Bereken die koördinate van D .
 (d) Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur C en D pas.

17. In die diagram hieronder is $f(\theta) = 3 \sin \theta$ en $g(\theta) = -\tan \theta$ geskets.



- (a) Gee die definisieversameling van g .
 (b) Wat is die amplitude van f ?
 (c) Bepaal vir watter waardes van θ :
 i. $f(\theta) = 0 = g(\theta)$
 ii. $f(\theta) \times g(\theta) < 0$
 iii. $\frac{g(\theta)}{f(\theta)} > 0$
 iv. $f(\theta)$ toenemend is?

A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

- (1.) 02mq (2.) 02mr (3.) 02ms (4.) 02mt (5.) 02mu (6.) 02mv
 (7.) 02mw (8.) 02mx (9.) 02my (10.) 02mz (11.) 02n0 (12.) 02n1
 (13.) 02n2 (14.) 02n3 (15.) 02n4 (16.) 02n5 (17.) 02n6

6.1 Geldstories



Ons gaan nou wiskundige vaardighede aanleer wat jy heel waarskynlik in jou lewe gaan nodig kry.

As jy R 1000, het, kan jy dit in jou beursie hou, of jy kan dit deponeer in 'n bankrekening. As dit in jou beursie bly, kan jy dit enige tyd uitgee wanneer jy wil. As die bank daarna kyk vir jou, kan hulle dit aanwend met die doel om wins daaruit te maak. Die bank "betaal" jou gewoonlik om geld te deponeer in 'n rekening om jou aan te moedig om met hulle sake te doen. Hierdie betaling is soos 'n beloning, wat vir jou die rede is om die geld liever in die bank te los vir 'n rukkie as om die geld in jou beursie te hou.

As jy geld in 'n bankrekening deponeer, is jy eintlik besig om jou geld aan die bank te leen en jy kan verwag om rente te ontvang van die bank. Net so, as jy geld leen van 'n bank (of van 'n afdelingswinkel, of 'n motorhandelaar, byvoorbeeld) dan kan jy verwag om rente te betaal op die lening. Dit is die prys vir die leen van geld.

Die idee is eenvoudig, en tog is dit die kern van die wêreld van finansies. Boekhouders, rekenmeesters en bankiers, bestee hulle hele professionele loopbaan deur te werk met die gevolg van rente op finansiële aangeleenthede.

6.2 Enkelvoudige rente



DEFINISIE: Enkelvoudige rente

Enkelvoudige rente is wanneer jy rente verdien op die aanvanklike bedrag wat jy belê het, maar nie rente op rente nie.

As 'n maklike voorbeeld van enkelvoudige rente, dink hoeveel jy sal kry deur R 1 000 te

belê vir 1 jaar by 'n bank wat vir jou enkelvoudige rente teen 5% per jaar gee. Aan die einde van die jaar sal jy rente ontvang van:

$$\begin{aligned}\text{Rente} &= \text{R } 1\,000 \times 5\% \\ &= \text{R } 1\,000 \times \frac{5}{100} \\ &= \text{R } 1\,000 \times 0,05 \\ &= \text{R } 50\end{aligned}$$

Dus, met 'n aanvangsbedrag van R 1 000 aan die begin van die jaar, sal jou eindbedrag aan die einde van die jaar dan wees:

$$\begin{aligned}\text{Eindbedrag} &= \text{Aanvangsbedrag} + \text{Rente} \\ &= \text{R } 1\,000 + \text{R } 50 \\ &= \text{R } 1\,050\end{aligned}$$

Ons noem soms die aanvangsbedrag in finansiële wiskunde die hoofsom, wat afgekort word as P (R 1 000 in die voorbeeld). Die rentekoers vir die tydsinterval word gewoonlik as 'n persentasie aangedui deur i (5% in die voorbeeld), en die bedrag aan rente verdien (in terme van Rand) word aangedui deur I (R 50 in die voorbeeld).

So, ons sien dat:

$$I = P \times i$$

en

$$\begin{aligned}\text{Eindbedrag} &= \text{Aanvangsbedrag} + \text{Rente} \\ &= P + I \\ &= P + P \times i \\ &= P(1 + i)\end{aligned}$$

Bostaande berekeninge gee vir ons 'n goeie idee van die formule vir enkelvoudige rente, maar die voorbeeld praat van 'n belegging vir slegs een jaar. As 'n belegging of lening oor 'n langer tyd gemaak word, moet dit in aanmerking geneem word. Ons gebruik die simbool ' n ' om die tydspanne aan te dui en hierdie waarde moet altyd in jare uitgedruk word.

Die formule wat gebruik word om enkelvoudige rente te bereken, is:

$$A = P(1 + in)$$

waar:

A = eindbedrag

P = aanvangsbedrag/hoofsom

i = rentekoers per tydsinterval

n = aantal tydsintervalle

Voorbeeld 1: Berekening van rente op 'n belegging

PROBLEEM

As Carine R 1 000 vir 3 jaar deponeer in 'n spesiale bankrekening teen 7% per jaar enkelvoudige rente, hoeveel geld sal sy aan die einde van hierdie tydperk hê?

OPLOSSING

Stap 1 : **Ons weet dat**

$$A = ?$$

$$P = 1\,000$$

$$i = 0,07$$

$$n = 3$$

Stap 2 : **Skryf die formule neer**

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3 : **Vervang die waardes in die formule**

$$\begin{aligned}
 A &= 1\,000(1 + 0,07 \times 3) \\
 &= 1\,210
 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Die eindbedrag nadat R 1 000 vir 3 jaar belê is teen 'n rentekoers van 7% per jaar, is R 1 210.

Voorbeeld 2: Bereken rente op 'n lening**PROBLEEM**

Sarah leen R 5 000 by haar buurvrou teen 'n ooreenkome rentekoers van 12,5% p.a. Sy sal die lening in een bedrag terugbetaal aan die einde van 2 jaar. Hoeveel sal sy moet terugbetaal?

OPLOSSING**Stap 1 : Skryf die veranderlikes neer**

$$A = ?$$

$$P = 5\,000$$

$$i = 0,125$$

$$n = 2$$

Stap 2 : Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3 : Vervang die waardes in die formule en bereken die oorblywende veranderlike

$$\begin{aligned} A &= 5\,000(1 + 0,125 \times 2) \\ &= 6\,250 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Aan die einde van 2 jaar, sal Sarah haar buurvrou R 6 250 moet betaal.

Ons kan die enkelvoudige rente formule gebruik om onbekende inligting te verkry. As ons byvoorbeeld 'n bedrag geld belê vir 'n vaste tyd om 'n sekere doel te bereik, kan ons die rentekoers bereken waaraan ons die geld moet belê om die doel te bereik. Of ons kan bereken vir hoe lank ons die geld moet belê as ons weet wat die aanvangsbedrag en die eindbedrag en die rentekoers is.

Belangrik: om 'n meer akkurate antwoord te kry, doen al jou sakrekenaar werk in een berekening en moenie tussenstappe afrond nie. Dit sal keer dat afrondings 'n te groot invloed het op jou finale antwoord.

Voorbeeld 3: *Bepaling van die tydperk om 'n bepaalde uitkoms te bereik***PROBLEEM**

As Prashant R 30 000 deponeer in 'n spesiale bankrekening wat 7,5% enkelvoudige rente p.a betaal, vir hoeveel jaar moet sy hierdie bedrag belê om 'n eindbedrag van R 45 000 laat realiseer?

OPLOSSING**Stap 1 : Skryf die bekende veranderlikes neer**

$$A = 45\,000$$

$$P = 30\,000$$

$$i = 0,075$$

$$n = ?$$

Stap 2 : Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3 : Vervang die bekende waardes en bereken die onbekende

$$\begin{aligned} 45\,000 &= 30\,000(1 + 0,075 \times n) \\ \frac{45\,000}{30\,000} &= 1 + 0,075 \times n \\ \frac{45\,000}{30\,000} - 1 &= 0,075 \times n \\ \frac{(\frac{45\,000}{30\,000}) - 1}{0,075} &= n \\ n &= 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Dit sal 'n periode van 6 jaar en 8 maande neem vir R 30 000 om te groei tot R 45 000 teen 'n enkelvoudige rentekoers van 7,5% p.a.

Voorbeeld 4: Bereken die rentekoers om 'n gevraagde mikpunt te bereik

PROBLEEM

Teen watter enkelvoudige rentekoers moet ek R 2 500 belê om R 4 000 te hê na 5 jaar?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf die bekende veranderlikes neer**

$$A = 4\,000$$

$$P = 2\,500$$

$$i = ?$$

$$n = 5$$

Stap 2 : **Skryf die formule neer**

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3 : **Vervang die waardes en bereken die onbekende veranderlike**

$$\begin{aligned} 4\,000 &= 2\,500(1 + i \times 5) \\ \frac{4\,000}{2\,500} &= 1 + i \times 5 \\ \frac{4\,000}{2\,500} - 1 &= i \times 5 \\ \frac{(\frac{4\,000}{2\,500}) - 1}{5} &= i \\ i &= 0,12 \end{aligned}$$

Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

'n Enkelvoudige rentekoers van 12% p.a. is nodig om R 2 500 oor 5 jaar te laat groei tot R 4 000.

Oefening 6 - 1

1. 'n Bedrag van R 3 500 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 7,5% p.a. Bereken die eindbedrag na 2 jaar.
2. Bereken die enkelvoudige rente in die volgende probleme:
 - (a) 'n Lening van R 300 teen 'n koers van 8% vir 1 jaar.
 - (b) 'n Belegging van R 2 250 teen 'n koers van 12,5% per jaar vir 6 jaar.
3. Sally wil die aantal jare bereken wat sy R 1 000 moet belê om te groei tot R 2 500. Sy word 'n enkelvoudige rentekoers van 8,2% p.a aangebied. Hoe lank sal dit neem vir die geld om te groei tot R 2 500?
4. Joseph het R 5 000 by die bank gedeponeer vir sy 5 jaar oue seun se 21^{ste} verjaarsdag. Hy het vir sy seun R 18 000 op sy verjaarsdag gegee. Teen watter enkelvoudige rentekoers was die geld belê?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ki (2.) 02kj (3.) 02kk (4.) 02km

6.3 Saamgestelde rente



Saamgestelde rente laat jou toe om rente op rente te verdien. In enkelvoudig rente, verdien jy slegs rente op jou aanvanklike bedrag, maar in saamgestelde rente kan jy rente verdien op jou oorspronklike bedrag sowel as op die rente wat reeds verdien is.

Saamgestelde rente is 'n wonderlike konsep as jy geld belê, maar as jy geld leen sal jy meer terugbetaal as rente saamgesteld bereken word en nie enkelvoudig nie.

DEFINISIE: Saamgestelde rente

Saamgestelde rente is die rente wat bereken word op die aanvangsbedrag en op die opgeloopte rente

Beskou die voorbeeld van R 1 000 wat vir 3 jaar by 'n bank wat 5% saamgestelde rente betaal, belê is. Aan die einde van die eerste jaar, word die opgeloopte bedrag

$$\begin{aligned} A_1 &= P(1 + i) \\ &= 1\,000(1 + 0,05) \\ &= 1\,050 \end{aligned}$$

Die bedrag A_1 word die nuwe aanvangsbedrag waarmee die opgeloopte bedrag aan die einde van die tweede jaar bereken is.

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1 + i) \\ &= 1\,050(1 + 0,05) \\ &= 1\,000(1 + 0,05)(1 + 0,05) \\ &= 1\,000(1 + 0,05)^2 \end{aligned}$$

Soortgelyk, gebruik ons die bedrag A_2 as die nuwe aanvangsbedrag om te opgeloopte bedrag aan die einde van die derde jaar te bereken.

$$\begin{aligned} A_3 &= P(1 + i) \\ &= 1\,000(1 + 0,05)^2(1 + 0,05) \\ &= 1\,000(1 + 0,05)^3 \end{aligned}$$

Sien jy 'n patroon? Laat ons 'n formule ontwikkel vir saamgestelde rente op dieselfde manier as wat ons 'n formule ontwikkel het vir enkelvoudige rente.

Indien ons aanvangsbedrag P is en ons het 'n rentekoers van i per jaar, dan sal die eindbedrag aan die einde van die eerste jaar gelyk wees aan:

$$\text{Eindbedrag na 1 jaar} = P(1 + i)$$

Dit is dieselfde as enkelvoudige rente, want dit strek net oor een tydinterval ('n jaar in hierdie geval). As ons die geld dan onttrek en weer belê vir nog 'n jaar - soos wat ons in die uitgewerkte voorbeeld hierbo gedoen het - sal die eindbedrag aan die einde van die tweede jaar as volg wees:

$$\begin{aligned} \text{Eindbedrag na 2 jaar} &= [P(1 + i)] \times (1 + i) \\ &= P(1 + i)^2 \end{aligned}$$

As ons hierdie geld onttrek en weer vir nog 'n jaar belê, sal die eindbedrag wees:

$$\begin{aligned}\text{Eindbedrag na 3 jaar} &= [P(1+i)^2] \times (1+i) \\ &= P(1+i)^3\end{aligned}$$

Ons kan sien dat die eksponent van die term $(1+i)$ gelyk is aan die aantal tydsintervalle (jare in hierdie voorbeeld.) Dus:

$$A = P(1+i)^n$$

waar:

$$A = \text{eindbedrag}$$

$$P = \text{aanvangsbedrag}$$

$$i = \text{rentekoers per tydsinterval, geskryf as 'n desimaal}$$

$$n = \text{tydsduur}$$

Voorbeeld 5: Saamgestelde rente

PROBLEEM

Mpho wil R 30 000 belê in 'n rekening wat saamgestelde rente van 6% p.a aanbied. Hoeveel geld sal daar in die rekening wees aan die einde van 4 jaar?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf bekende veranderlikes neer**

$$A = ?$$

$$P = 30\,000$$

$$i = 0,06$$

$$n = 4$$

Stap 2 : **Skryf die formule neer**

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3 : **Vervang die waardes en los op vir die onbekende veranderlike**

$$\begin{aligned} A &= 30\,000(1 + 0,06)^4 \\ &= 37\,874,31 \end{aligned}$$

Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

Mpho sal R 37 874,31 in die rekening hê na 4 jaar.

Voorbeeld 6: Bereken die saamgestelde rentekoers om 'n mikpunt te bereik

PROBLEEM

Charlie kry R 5 000 vir sy sestiende verjaarsdag en eerder as om dit te spandeer, besluit hy om dit te belê sodat hy op sy agtiende verjaarsdag 'n deposito van R 10 000 kan neersit op 'n motor. Watter saamgestelde rentekoers behoort hy te kry om dit reg te kry?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf die bekende veranderlikes neer**

$$\begin{aligned} A &= 10\,000 \\ P &= 5\,000 \\ i &= ? \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Skryf die formule neer**

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3 : Vervang die waardes en los op vir die oorblywende veranderlike

$$\begin{aligned} 10\,000 &= 5\,000(1 + i)^2 \\ \frac{10\,000}{5\,000} &= (1 + i)^2 \\ \sqrt{\frac{10\,000}{5\,000}} &= 1 + i \\ \sqrt{\frac{10\,000}{5\,000}} - 1 &= i \\ i &= 0,4142 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Charlie moet 'n belegging maak wat 'n saamgestelde rente van 41,42% p.a. betaal om die verwagte groei te bereik. 'n Tipiese spaarrekening gee 'n koers van ongeveer 2% p.a. en 'n aggressiewe beleggingsportefeuille gee 'n koers van ongeveer 13% p.a. Dus lyk dit hoogs onwaarskynlik dat Charlie sy geld teen 'n koers van 41,42% p.a. sal kan belê.

Die krag van saamgestelde rente



Om te sien hoe belangrik "rente op rente" is, sal ons kyk na die verskil in die eindbedrae van geld wat teen enkelvoudige rente belê is en geld wat teen saamgestelde rente belê is. Beskou 'n bedrag van R 10 000 wat jy vir 10 jaar moet belê en aanvaar dat jy rente kan verdien teen 9% per jaar. Wat sal die waarde van die belegging wees na 10 jaar?

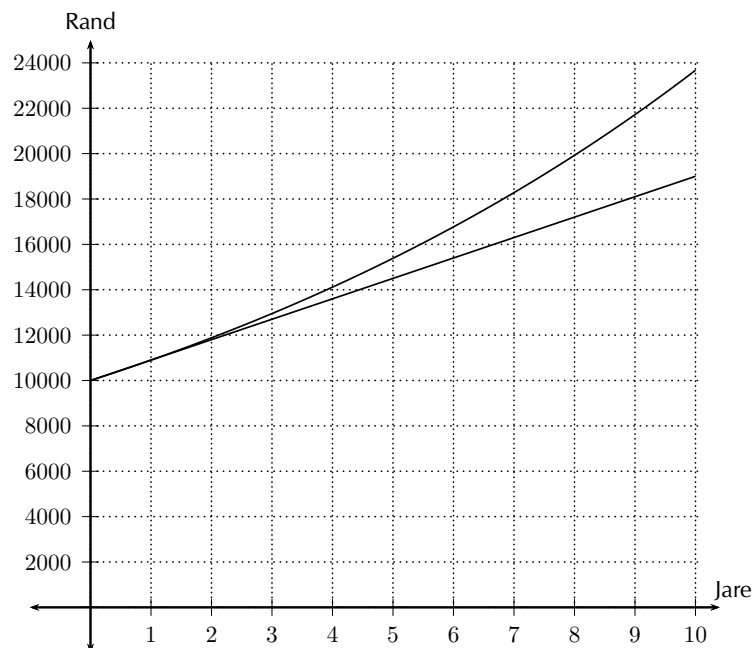
Die eindbedrag indien die geld enkelvoudige rente verdien, is:

$$\begin{aligned}A &= P(1 + in) \\&= 10\,000(1 + 0,09 \times 10) \\&= \text{R } 19\,000\end{aligned}$$

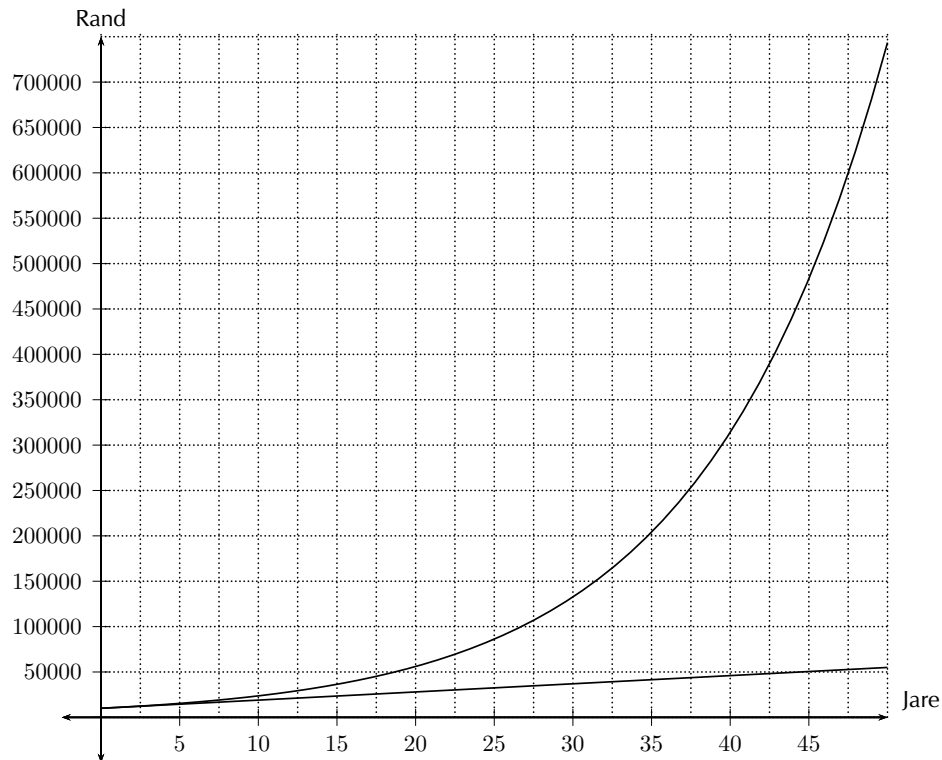
Die eindbedrag indien die geld saamgestelde rente verdien, is:

$$\begin{aligned}A &= P(1 + i)^n \\&= 10\,000(1 + 0,09)^{10} \\&= \text{R } 23\,673,64\end{aligned}$$

As ons grafieke trek van die groei van die bedrag is dit makliker om te sien hoe die geld wat enkelvoudig belê is reglynig groei maar eksponensieel groei as dit saamgestelde rente verdien:



Dit is nog duideliker om die enorme verskil te sien indien die rentekoers 9% p.a. bly en die tydperiode verleng word na 50 jaar:



Weereens, hou in gedagte dat dit goeie nuus en slegte nuus is. As jy rente verdien op geld wat jy belê het, sal saamgestelde rente daartoe lei dat die bedrag eksponensieel vermeerder. Maar, as jy geld geleen het, sal daardie bedrag ook eksponensieel groei.

Oefening 6 - 2

1. 'n Bedrag van R 3 500 word belê in 'n spaarrekening wat saamgestelde rente verdien teen 7,5% per jaar. Bereken die bedrag wat opgebou is in die rekening na verloop van 2 jaar.
2. Morgan belê R 5 000 in 'n rekening wat aan die einde van 5 jaar 'n groot bedrag uitbetaal. As hy R 7 500 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank hom aangebied?
3. Nicola wil geld belê teen 11% per jaar saamgestelde rente. Hoeveel geld (tot die naaste Rand) moet sy belê indien sy oor 5 jaar 'n bedrag van R 100 000 wil hê?

A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02kn (2.) 02kp (3.) 02kq

Huurkoop



As 'n algemene reël, is dit nie 'n goeie idee om goed op krediet te koop nie. Dit beteken dat jy geld leen om vir 'n aankoop te betaal en dat jy dus meer gaan betaal omdat jy rente op 'n lening moet betaal. Maar, soms is daar toenusting, soos 'n yskas, waarsonder mens moeilik kan klaarkom. Meeste mense het nie vermoë om sulke items kontant te koop nie, dus koop hulle dit op huurkoop.

'n Huurkoopsooreenkoms in 'n finansiële kontrak tussen die winkel en die kliënt oor hoe die kliënt gaan betaal vir die produk. Die rente op 'n huurkoopsooreenkoms is altyd enkelvoudig en word slegs gehef op die uitstaande bedrag. In die meeste gevalle word verwag dat jy 'n deposito sal betaal voordat jy die produk kan huis toe neem. Die opgeloopte lening word bereken op grond van die tydperk waarvoor jy die lening wil uitneem. Die totale leningsbedrag word dan verdeel in maandelikse paaielemente oor die leningsperiode.

Onthou: huurkoop word teen 'n enkelvoudige rentekoers bereken. Gebruik dus altyd die enkelvoudige renteformule in huurkoop berekeninge.

Voorbeeld 7: Huurkoop

PROBLEEM

Troy wil graag 'n ekstra hardeskyf vir sy skootrekenaar koop teen R 2 500 soos dit op die internet adverteer word. Daar is die opsie om 'n deposito van 10% van die koopprys te betaal en dan in 'n huurkoopsooreenkoms 24 gelyke maandelikse paaielemente te betaal waar rente bereken sal word teen 7,5% per jaar enkelvoudige rente. Bereken wat Troy se maandelikse paaielement sal wees.

OPLOSSING

Stap 1 : 'n Nuwe aanvangsbedrag is nodig, want die 10% deposito is kontant betaal

$$10\% \text{ van } 2\,500 = 250$$

$$\therefore P = 2\,500 - 250 = 2\,250$$

$$i = 0,075$$

$$n = \frac{24}{12} = 2$$

Ons moet die eindbedrag (A) bepaal en dan die maandelikse paaimente bereken.

Stap 2 : Vervang die waardes en bereken die onbekende veranderlike

Van die gegewe formule weet ons dat:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 2\,250(1 + 0,075 \times 2) \\ &= 2\,587,50 \end{aligned}$$

Stap 3 : Bereken die maandelikse terugbetalings op die huurkooporeenkoms

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiment} &= \frac{2\,587,50}{24} \\ &= 107,81 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Troy se maandelikse paaiment = R 107,81.

Soms voeg die winkel 'n maandelikse versekeringspremie by die maandelikse paaimente. Hierdie premie verseker jou van meer tyd tussen 'n onbetaalde paaiment en moontlike beslaglegging op die aangekoopte produk.

Voorbeeld 8: Huurkoop met ekstra voorwaardes**PROBLEEM**

Cassidy is desperaat om 'n TV te koop en gevolglik besluit sy op 'n huurkooppooreenkoms. Die TV se kontantsprys is R 5 500. Sy moet dit afbetaal oor 54 maande teen 'n rentekoers van 21%p.a. 'n Versekeringspremie van R 12,50 per maand word bygevoeg. Hoeveel moet sy per maand betaal?

OPLOSSING

Stap 1 : Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned}P &= 5\,500 \\i &= 0,21 \\n &= \frac{54}{12} = 4,5\end{aligned}$$

(Die vraag meld niks van 'n deposito nie, daarom aanvaar ons Cassidy het nie een betaal nie)

Stap 2 : Skryf die formule neer

$$A = P(1 + in)$$

Stap 3 : Vervang die waardes en bereken die onbekende veranderlike

$$\begin{aligned}A &= 5\,500(1 + 0,21 \times 4,5) \\&= 10\,697,50\end{aligned}$$

Stap 4 : Bereken die maandelikse terugbetalings op die huurkooppooreenkoms

$$\begin{aligned}\text{Maandelikse betalings} &= \frac{10\,697,50}{54} \\ &= 198,10\end{aligned}$$

Stap 5 : Voeg die versekeringspremie by

$$198,10 + 12,50 = 210,60$$

Stap 6 : Skryf die finale antwoord

Cassidy sal R 210,60 vir 54 maande betaal tot haar TV afbetaal is.

Oefening 6 - 3

1. Vanessa wil 'n yskas op huurkoop koop. Die kontantprys is R 4 500. Sy moet 'n deposito van 15% betaal en die oorblywende bedrag oor 24 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.
 - (a) Wat is die aanvangsbedrag (hoofsom)?
 - (b) Wat is die eindbedrag wat sy terugbetaal?
 - (c) Wat is Vanessa se maandelikse paaielemente?
 - (d) Hoeveel het Vanessa in totaal vir haar yskas betaal?
2. Bongani koop 'n eetkamertafel van R 8 500 op huurkoop. Hy moet enkelvoudige rente van 17,5% per jaar betaal oor 3 jaar.
 - (a) Hoeveel sal Bongani in totaal betaal?
 - (b) Hoeveel rente betaal hy?
 - (c) Wat is sy maandelikse paaielement?
3. 'n Sitkamerstel word geadverteer op TV. Dit moet oor 36 maande terugbetaal word teen R 150 'n maand.
 - (a) Aanvaar daar is geen deposito nodig nie, hoeveel sal die koper betaal vir die stel teen die tyd wat dit afbetaal is?
 - (b) As die rentekoers 9% p.a. is, wat is die konstantprys van die stel?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.) 02kr (2.) 02ks (3.) 02kt

Inflasie



Dikwels hoor mens ouer mense praat oor vervloë tye toe alles goedkoper was. Jy kan dalk onthou toe jy as 'n kind dinge gekoop het en is nou geskok oor die verhogings in pryse. Daar is baie faktore wat die prysverandering op 'n item beïnvloed en een daarvan is inflasie.

Inflasie is die gemiddelde persentasie waarteen pryse per jaar toeneem. Aangesien die pryse jaarliks toeneem, word dit bereken met die saamgestelde groei-formule.

Voorbeeld 9: Berekening van toekomstige koste gebaseer op inflasie

PROBLEEM

Melk kos R 14 vir 2 liter. Hoeveel sal dit kos oor 4 jaar as die inflasiekoers 9% p.a. is?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf die bekende veranderlikes neer**

$$P = 14$$

$$i = 0,09$$

$$n = 4$$

Stap 2 : **Skryf die formule neer**

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3 : Vervang die bekende waardes en los op vir die onbekende veranderlike

$$\begin{aligned} A &= 14(1 + 0,09)^4 \\ &= 19,76 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Oor 4 jaar sal melk R 19,76 vir 'n 2 liter kos.

Voorbeeld 10: Berekening van historiese koste gebaseer op inflasie

PROBLEEM

'n Boks sjokelade kos vandag R 55. Hoeveel sou dit 3 jaar gelede gekos het as die gemiddelde inflasiekoers 11% p.a. was?

OPLOSSING

Stap 1 : Skryf die onbekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} A &= 55 \\ i &= 0,11 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Stap 2 : Skryf die formule neer

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3 : **Vervang die bekende waardes en los op vir die onbekende veranderlikes**

$$55 = P(1 + 0,11)^3$$

$$\frac{55}{(1 + 0,11)^3} = P$$

$$P = 40,22$$

Stap 4 : **Verduidelik jou antwoord**

Drie jaar gelede sou 'n boks sjokolades R 40,22 gekos het.

Bevolkingsgroei



Die familieboom neem eksponensieel toe omdat elkeen wat gebore word weer die vermoë het om deel te wees van verdere voortplanting. Daarom gebruik ons die saamgestelde renteformule om bevolkingsgroei te bereken.

Voorbeeld 11: Bevolkingsgroei

PROBLEEM

As die huidige bevolking van Johannesburg 3 888 180 is, en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika 2,1% p.a. is, wat sal die verwagte bevolking van Johannesburg oor 10 jaar wees?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf die bekende veranderlikes neer**

$$P = 3\,888\,180$$

$$i = 0,021$$

$$n = 10$$

Stap 2 : Skryf die formule neer

$$A = P(1 + i)^n$$

Stap 3 : Vervang die waardes en los op vir die oorblywende veranderlike

$$\begin{aligned} A &= 3\,888\,180(1 + 0,021)^{10} \\ &= 4\,786\,342,614 \end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Stadsbeplanners kan 'n bevolking van 4 786 343 in Johannesburg verwag oor 10 jaar.

Oefening 6 - 4

1. Die gemiddelde inflasiekoers vir die afgelope aantal jare is 7,3% per jaar en jou water- en elektrisiteitsrekening is gemiddeld R 1 425 per maand. Bereken wat jy kan verwag om te betaal oor 6 jaar?
2. Die prys van springmielies en koeldrank by die fliek is nou R 60. As die gemiddelde inflasie koers 9,2% is, wat was die prys 5 jaar gelede?
3. 'n Klein dorpie in Ohio, VSA, ondervind 'n groot toename in geboortes. As die gemiddelde groeikoers van die bevolking 16% p.a is, hoeveel babas sal gebore word vir die 1600 inwoners in die volgende 2 jaar?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ku (2.) 02kv (3.) 02kw

Buitelandse wisselkoerse



Verskillende lande het hulle eie wisselkoerse ontwikkel oor die jare. In Engeland kos 'n big Mac van MacDonalds ongeveer £ 4, in Suid-Afrika kos dit R 20 en in Noorweë sal dit jou 48 kr kos. In al drie hierdie lande sal jy dieselfde maaltyd kry, maar nie dieselfde prys betaal nie. Toe die boek geskryf is, was £ 1 = R 12,41 en 1 kr = R 1,37. Dit beteken dat die Big Mac kos 'n Suid-Afrikaner wat na Engeland reis R 49,64 en wat in Noorweë reis R 65,76.

Wisselkoers het 'n veel groter invloed as slegs die prys van 'n Big Mac. Die prys van olie styg wanneer die Suid-Afrikaanse rand verswak. Dit gebeur omdat ons met 'n swakker rand minder in ander geldeenhede kan koop as vantevore.

Die wisselkoers versterk wanneer geld in die land belê word. Wanneer ons produkte koop wat in Suid-Afrika vervaardig word, belê ons in die land se ekonomie en hou ons die geld in die land. Wanneer ons goedere koop wat ingevoer word van ander lande, sal die rand verswak. Onthou, hoe meer Suid-Afrikaanse goedere ons koop, hoe groter word die aanvraag daarvoor wat werkskepping sal bevorder. 'Local is lekker'!

▶ Video: VMbcj by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 12: Buitelandse wisselkoerse

PROBLEEM

Saba wil oorsee gaan om familie in Spanje te besoek. Sy het R 10 000 beskikbaar om te spandeer. Hoeveel euros kan sy daarvoor koop as die wisselkoers tans € 1 = R 10,68?

OPLOSSING

Stap 1 : **Skryf die formule neer**

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{10\,000}{10,68} \\
 &= 936,33
 \end{aligned}$$

Stap 2 : Skryf die finale antwoord

Sy kan € 936,33 koop met R 10 000.

Oefening 6 - 5

- Bridget wil 'n iPod koop wat £ 100 kos, en die huidige wisselkoers is £ 1 = R 14. Sy glo die wisselkoers gaan verander na R 12 binne 'n maand.
 - Hoeveel sal die iPod speler in Rand kos as sy dit nou koop?
 - Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal na R 12?
 - Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 15?
- Bestudeer die volgende tabel met wisselkoerse:

Land	Geldeenheid	Wisselkoers
Verenigde Koninkryk(VK)	Ponde (£)	R 14,13
Amerika (VSA)	Dollars (\$)	R 7,04

- In Suid-Afrika is die koste van 'n nuwe Honda Civic R 173 400. In Engeland kos dieselfde voertuig £ 12 200 en in die VSA \$ 21 900. In watter land is die voertuig die goedkoopste as jy die pryse omskakel na Suid-Afrikaanse rand?
- Sollie en Arinda is kelners in 'n Suid-Afrikaanse restaurant wat baie oorsese toeriste lok. Sollie kry 'n £ 6 footjie van 'n toeris en Arinda kry \$ 12. Hoeveel Suid-Afrikaanse Rand het elkeen gekry?

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02kx (2.) 02ky

Hoofstuk 6 | Opsomming

► Opsommingsaanbieding: VMdib by www.everythingmaths.co.za

- Daar is twee soorte rente: enkelvoudige rente en saamgetelde rente:

enkelvoudige rente

$$A = P(1 + in)$$

waar:

saamgetelde rente

$$A = P(1 + i)^n$$

A = aanvangsbedrag

P = eindbedrag

i = rentekoers per tydsinterval

n = aantal tydsintervalle

- Huurkoopterugbetalings word bereken met die enkelvoudige renteformule op die oorblywende leningsbedrag. Maandelikse terugbetalings word bereken deur die opgeloopte bedrag te deel deur die aantal maande waarbinne die lening moet terug betaal word.
- Bevolkingsgroei en inflasie word bereken met behulp van die saamgestelde renteformule.
- 'n Buitelandse wisselkoers is die prys van een geldeenheid in terme van 'n ander.

Hoofstuk 6

Einde van Hoofstuk Oefeninge

- Alison is met vakansie in Europa. Haar hotel vra € 200 euro per nag. Hoeveel rand het sy nodig om die hotelrekening te betaal as die wisselkoers € 1 = R 9,20?
- Bereken hoeveel rente jy sal verdien as jy R 500 vir 1 jaar belê teen die volgende rentekoerse:
 - 6,85% enkelvoudige rente
 - 4,00% saamgetelde rente
- Bianca het R 1 450 om vir 3 jaar te belê. Bank A bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 11% per annum. Bank B bied 'n spaarrekening aan wat saamgestelde rente betaal teen 'n koers van 10,5% per annum. Watter bank gaan vir Bianca die spaarrekening gee met die grootste opgeloopte bedrag aan die einde van die 3 jaar?

4. Hoeveel enkelvoudige rente is betaalbaar op 'n lening van R 2 000 vir 'n jaar indien die rentekoers 10% per jaar is?
5. Hoeveel saamgestelde rente is betaalbaar op 'n lening van R 2 000 vir 'n jaar indien die rentekoers 10% per jaar is?
6. Bespreek:
 - (a) watter soort rente jy sal verkies as jy die lener is?
 - (b) watter soort rente jy sal verkies as jy die bankier is?
7. Bereken die saamgestelde rente vir die volgende probleme.
 - (a) 'n lening van R 2 000 vir 2 jaar teen 5% per jaar
 - (b) 'n belegging van R 1 500 vir 3 jaar teen 6% per jaar
 - (c) 'n lening van R 800 vir 1 jaar teen 16% per jaar
8. As die wisselkoers vir ¥ 100 = R 6,2287 (¥ = Yen) en 1 Australiese dollar (AUD) = R 5,1094, bepaal die wisselkoers tussen die Australiese dollar en die Japanese jen.
9. Bonnie het 'n stoof gekoop vir R 3 750. Na 3 jaar het sy dit klaar betaal, asook die R 956,25 huurkoopkoste. Bereken die koers waarteen enkelvoudige rente bereken is.
10. Volgens die nuutste sensus, het Suid-Afrika 'n bevolking van 57 000 000.
 - (a) Indien 'n jaarlikse groeikoers van 0,9% verwag word, bereken hoeveel Suid-Afrikaners daar oor 10 jaar sal wees (korrek tot die naaste honderdduisend).
 - (b) As dit na 10 jaar gevind word dat die bevolking eintlik met 10 miljoen tot 67 miljoen gegroei het, wat was die groeikoers?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02kz (2.) 02m0 (3.) 02m1 (4.) 02m2 (5.) 02m3 (6.) 02m4

(7.) 02m5 (8.) 02m6 (9.) 02m7 (10.) 02m8

Trigonometrie handel oor die verwantskappe tussen die hoeke en die sye van 'n reghoekige driehoek. Ons sal van trigonometriese funksies wat die basis van trigonometrie vorm leer.

7.1 Trigonometrie is bruikbaar



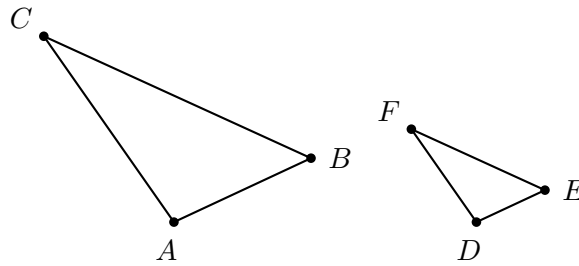
Daar is vele toepassings van trigonometrie. Van spesifieke belang is die tegniek van driehoeksmeting wat gebruik word in sterrekunde om die afstand na nabye sterre te meet, in aardrykskunde (geografie) om die afstand tussen landmerke te meet en in satellietnavigasie. GPS (globale posisioneringstelsels) sou nie moontlik gewees het sonder trigonometrie nie. Ander gebiede wat trigonometrie gebruik sluit in akoestiek, optika, analise van finansiële markte, elektronika, waarskynlikheidsteorie, statistiek, biologie, mediese grafiese werk (CAT skandering en ultraklank), chemie, kriptologie, meteorologie, oseanografie, landmeetkunde, argitektuur, fonetika, ingenieurswese, rekenaargrafika, en in die ontwikkeling van rekenaarspeletjies.

7.2 Gelykvormigheid van driehoeke



As $\triangle ABC$ gelykvormig is aan $\triangle DEF$, dan word dit geskryf as:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



Dit is moontlik om die verhoudings af te lei tussen ooreenkomstige sye van die twee gelykvormige driehoeke:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{DE}{EF} \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{DE}{DF} \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{DF}{EF} \\ \frac{AB}{DE} &= \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}\end{aligned}$$

Nog 'n belangrike feit oor die gelykvormige driehoeke ABC en DEF is dat hoek A gelyk aan hoek D is, hoek B gelyk aan hoek E is en hoek C gelyk aan hoek F is.

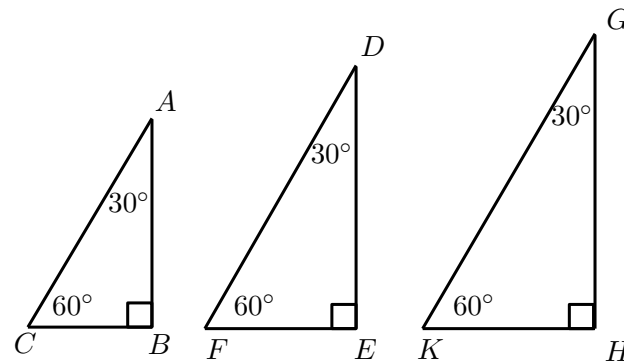
$$\hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{C} = \hat{F}$$

Onderzoek:	<i>Verhoudings van gelykvormige driehoeke</i>
-------------------	---

Teken drie gelykvormige driehoeke van verskillende groottes, met elke $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{B} = 90^\circ$ en $\hat{C} = 60^\circ$. Meet hoeke en lengtes akkuraat en skryf die metings in die tabel neer (rond die metings af na 1 desimale plek).



Deel lengtes van sye (verhoudings)		
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{CB}{AC} =$
$\frac{DE}{EF} =$	$\frac{DE}{DF} =$	$\frac{FE}{DF} =$
$\frac{GH}{HK} =$	$\frac{GH}{GK} =$	$\frac{KH}{GK} =$

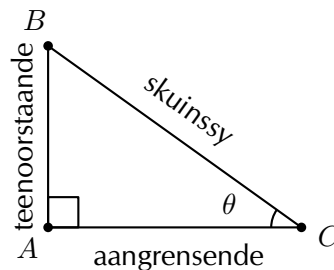
Watter waarnemings kan jy oor die verhoudings van die sye maak?

Hierdie gelyke verhoudings word gebruik om die trigonometriese verhoudings te definieer.

7.3 Definisie van die trigonometriese verhoudings

www EMDCO

Beskou 'n reghoekige driehoek ABC .



In die reghoekige driehoek verwys ons na die lengtes van die sye na gelang van hulle

plasing in verhouding tot die hoek θ . Die sy oorkant die regte hoek is die skuinssy, die sy oorkant θ is die teenoorstaande sy en die sy naaste aan θ is die aangrensende sy. Let op dat die keuse van die nie-90° binnehoek arbitrer is. Jy kan enige van die binnehoeke kies en dan die aangrensende en teenoorstaande sye definieer. Die skuinssy bly egter die skuinssy ongeag die binnehoek van belang (omdat dit *altyd* oorkant die regte hoek is en *altyd* die langste sy is). Ons definieer die trigonometriese verhoudings sinus, cosinus en tangens soos volg:

$$\sin \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

Hierdie verhoudings, ook bekend as die trigonometriese definisies, bepaal die verhoudings van die lengtes van 'n driehoek se sye tot sy binnehoeke. Hierdie drie verhoudings vorm die basis van trigonometrie.

Let wel: die definisies van teenoorstaande sy, aangrensende sy en skuinssy is net van toepassing wanneer mens met 'n reghoekige driehoek werk! Bevestig telkens dat jou driehoek 'n regte hoek bevat alvorens jy die verhoudings gebruik, anders kry jy die verkeerde antwoord.

7.4 Omgekeerde funksies



Elk van die drie trigonometriese funksies het 'n omgekeerde, ook genoem 'n resiprook. Die omgekeerdes cosecant, secant en cotangens word soos volg gedefinieer:

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Ons kan ook hierdie omgekeerdes vir enige reghoekige driehoek definieer:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \theta &= \frac{\text{skuinssy}}{\text{teenoorstaande sy}} \\ \sec \theta &= \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}} \\ \cot \theta &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{teenoorstaande sy}} \end{aligned}$$

Nota:

$$\sin \theta \times \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$\cos \theta \times \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta \times \cot \theta = 1$$

► Video: VMber by www.everythingmaths.co.za

Let wel: die meeste wetenskaplike sakrekenaars is naastenby dieselfde maar die stappe hieronder mag verskil afhangende van die sakrekenaar wat jy gebruik. Maak seker jou sakrekenaar is in 'degrees' (grade)odus.

Voorbeeld 1: Gebruik jou sakrekenaar

PROBLEEM

Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te bereken (korrek tot 2 desimale plekke):

1. $\cos 48^\circ$
2. $2 \sin 35^\circ$
3. $\tan^2 81^\circ$
4. $3 \sin^2 72^\circ$
5. $\frac{1}{4} \cos 27^\circ$
6. $\frac{5}{6} \tan 34^\circ$

OPLOSSING

Stap 1 :

Press $\cos$ 48 $=$ 0,67

Stap 2 :

Press 2 $\sin$ 35 $=$ 1,15

Stap 3 :

Press $($ $\tan$ 81 $)$ x^2 $=$ 39,86

OF

Press $\tan$ 81 $=$ ANS x^2 $=$ 39,86

Stap 4 :

Press 3 $($ $\sin$ 72 $)$ x^2 $=$ 2,71

OF

Press $\sin$ 72 $=$ ANS x^2 $=$ ANS $\times$ 3

Stap 5 :

Press $($ $1 \div 4$ $)$ $\cos$ 27 $=$ 0,22

OF

Press $\cos$ 27 $=$ ANS $\div$ 4 $=$ 0,22

Stap 6 :

Press $($ $5 \div 6$ $)$ $\tan$ 34 $=$ 0,56

OF

Press $\tan$ 34 $=$ ANS $\times$ $5 \div 6$ $=$ 0,56

Voorbeeld 2: Sakrekenaarwerk

PROBLEEM

As $x = 25^\circ$ en $y = 65^\circ$ is, gebruik jou sakrekenaar om te bepaal of die volgende stelling waar of vals is:

$$\sin^2 x + \cos^2 (90^\circ - y) = 1$$

OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die linkerkant van die uitdrukking**

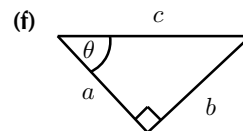
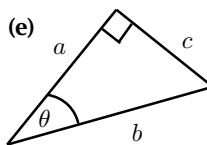
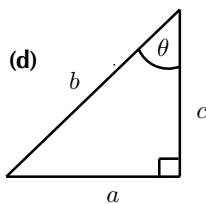
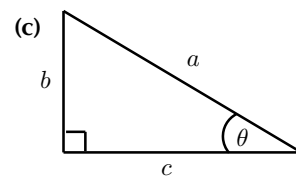
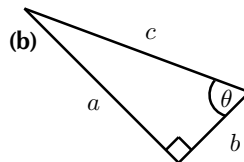
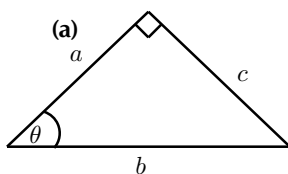
Druk $(\sin 25) \times 1 + (\cos (90 - 65)) \times 1 =$
1

Stap 2 : **Skryf die finale antwoord neer**

LK = RK dus is die stelling waar.

Oefening 7 - 1

1. In elk van die volgende driehoeke, dui aan watter van a , b en c die skuinssy, die teenoorstaande sy en die aangrensende sy van die driehoek is ten opsigte van θ .



2. Gebruik jou sakrekenaar om die waardes van die volgende te bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

(a) $\tan 65^\circ$

(b) $\sin 38^\circ$

(c) $\cos 74^\circ$

(d) $\sin 12^\circ$

(e) $\cos 26^\circ$

(f) $\tan 49^\circ$

(g) $\frac{1}{4} \cos 20^\circ$

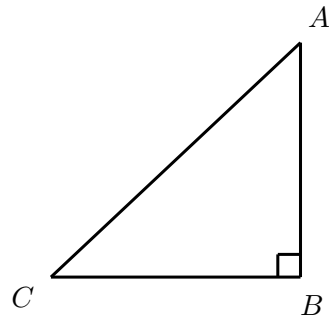
(h) $3 \tan 40^\circ$

(i) $\frac{2}{3} \sin 90^\circ$

3. As $x = 39^\circ$ en $y = 21^\circ$ is, gebruik 'n sakrekenaar om te bepaal of die volgende waar of vals is:

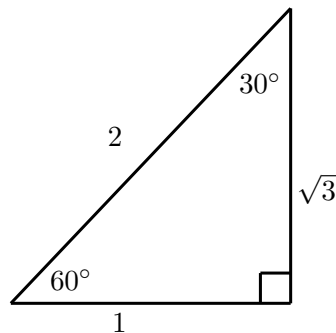
- (a) $\cos x + 2 \cos x = 3 \cos x$ (c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 (b) $\cos 2y = \cos y + \cos y$ (d) $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$

4. Voltooi elk van die volgende (die eerste voorbeeld is klaar gedoen):



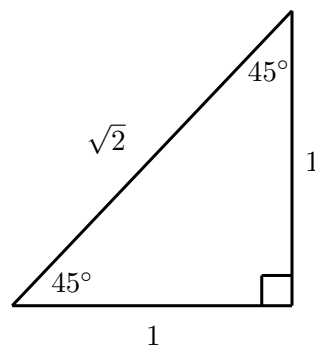
- (a) $\sin \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC}$ (d) $\sin \hat{C} =$
 (b) $\cos \hat{A} =$ (e) $\cos \hat{C} =$
 (c) $\tan \hat{A} =$ (f) $\tan \hat{C} =$

5. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



- (a) $\sin 60^\circ =$ (d) $\sin 30^\circ =$
 (b) $\cos 60^\circ =$ (e) $\cos 30^\circ =$
 (c) $\tan 60^\circ =$ (f) $\tan 30^\circ =$

6. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



(a) $\sin 45^\circ =$

(b) $\cos 45^\circ =$

(c) $\tan 45^\circ =$

A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02re (2.) 02rf (3.) 02rg (4.) 02rh (5.) 02ri (6.) 02rj

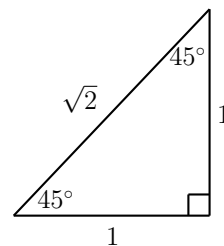
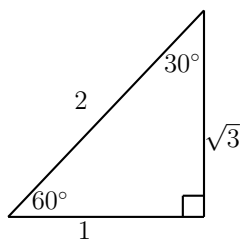
7.5 *Spesiale hoeke*

 EMDCQ

Vir meeste hoeke θ het ons 'n sakrekenaar nodig om die waardes van $\sin \theta$, $\cos \theta$ en $\tan \theta$ te bereken. Ons het egter in die vorige oefening gesien dat ons hierdie waardes per hand kan bereken vir sekere spesiale hoeke. Die waardes van die trigonometriesse funksies van hierdie hoeke word gelys in die tabel hieronder.

Onthou dat die lengtes van 'n reghoekige driehoek die stelling van Pythagoras moet bevredig: die vierkant op die skuinssy is gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.

	30°	45°	60°
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



Hierdie waardes is handig wanneer ons 'n probleem in trigonometrie moet oplos sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

Oefening 7 - 2

1. Bereken die volgende sonder 'n sakrekenaar:

(a) $\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$

(b) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

(c) $\sin 60^\circ - \cos 60^\circ$

2. Gebruik die tabel hierbo om aan te dui dat:

(a) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ$

(b) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

(c) $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ}$

3. Gebruik die definisies van die trigonometriese verhoudings om die volgende vrae te beantwoord:

(a) Verduidelik hoekom $\sin \alpha \leq 1$ is vir alle α .

(b) Verduidelik hoekom $\cos \beta$ 'n maksimum waarde van 1 het.

(c) Is daar 'n maksimum vir $\tan \gamma$?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02rk (2.) 02rm (3.) 02rn

7.6

Oplos van trigonometriese vergelykings

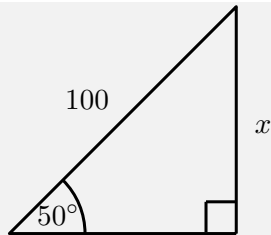
 EMDCR

 Video: VMbfo by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 3: Berekening van lengtes

PROBLEEM

Bereken die lengte van x in die volgende reghoekige driehoek:

**OPLOSSING**

Stap 1 : **Identifiseer die teenoorstaande sy en die aangrensende sy**

$$\sin \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$$
$$\sin 50^\circ = \frac{x}{100}$$

Stap 2 : **Herrangskik die vergelyking om vir x op te los**

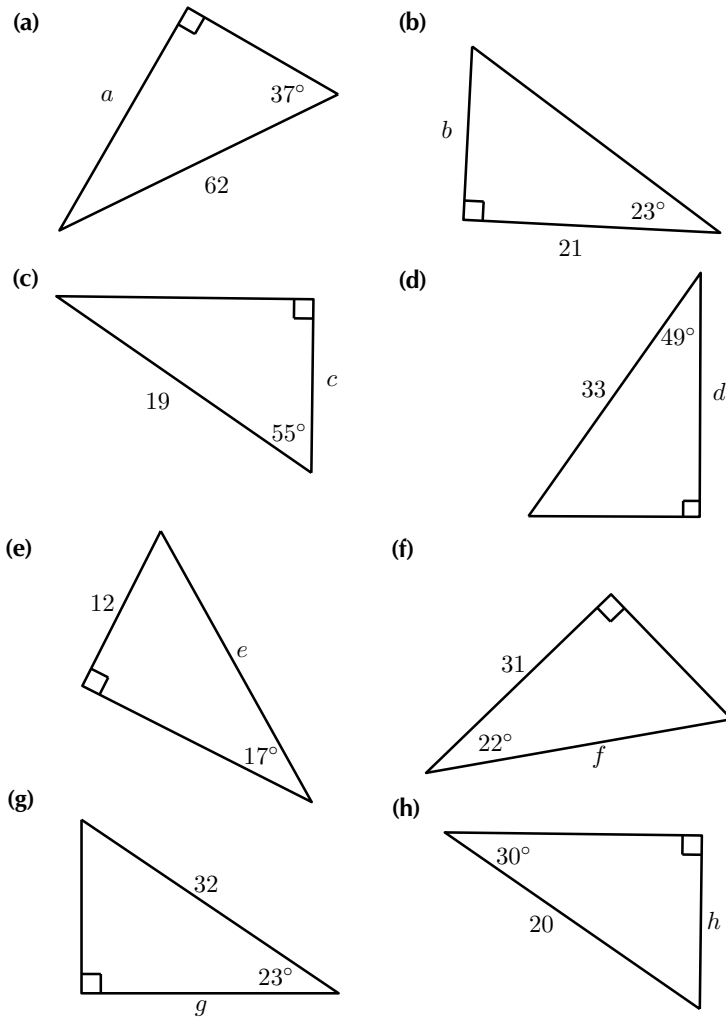
$$x = 100 \times \sin 50^\circ$$

Stap 3 : **Gebruik jou sakrekenaar om die antwoord te bereken**

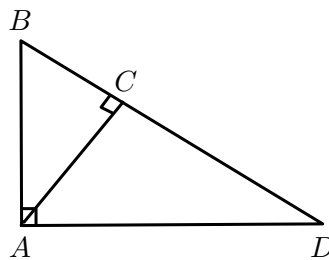
$$x = 76,6$$

Oefening 7 - 3

1. Vir elke driehoek, bereken die lengte van die sy wat met 'n letter gemerk is. Gee die antwoorde korrek tot 2 desimale plekke.



2. Skryf twee verhoudings neer in terme van die sye vir elk van die volgende:
 AB ; BC ; BD ; AD ; DC en AC



- (a) $\sin \hat{B}$
 (b) $\cos \hat{D}$
 (c) $\tan \hat{B}$

3. In $\triangle MNP$, $\hat{N} = 90^\circ$, $MP = 20$ cm en $\hat{P} = 40^\circ$. Bereken NP en MN (korrek tot 2 desimale plekke).

Meer oefening
 video oplossings
 of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02rp (2.) 02rq (3.) 02rr

7.7 Berekening van 'n hoek

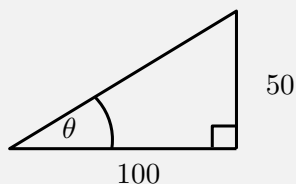
EMDCS

Video: VMbfq by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 4: Hoekberekeninge

PROBLEEM

Vind die waarde van θ in die volgende reghoekige driehoek:



OPLOSSING

Stap 1 : **Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy**

In hierdie geval het jy die teenoorstaande sy en die aangrensende sy vir hoek θ .

$$\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

$$\tan \theta = \frac{50}{100}$$

Stap 2 : **Gebruik jou sakrekenaar om vir θ op te los**

Om vir θ op te los sal jy die inverse funksie van jou sakrekenaar

benodig:

Druk $\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\tan} \boxed{(} \boxed{50} \boxed{\div} \boxed{100} \boxed{)} \boxed{=}$ 26,6

Stap 3 : Skryf die finale antwoord neer

$$\theta = 26,6^\circ$$

Oefening 7 - 4

1. Bepaal die hoek (korrek tot 1 desimale plek):

(a) $\tan \theta = 1,7$

(i) $\sin \beta + 2 = 2,65$

(b) $\sin \theta = 0,8$

(j) $\sin \theta = 0,8$

(c) $\cos \alpha = 0,32$

(k) $3 \tan \beta = 1$

(d) $\tan \theta = 5\frac{3}{4}$

(l) $\sin 3\alpha = 1,2$

(e) $\sin \theta = \frac{2}{3}$

(m) $\tan\left(\frac{\theta}{3}\right) = \sin 48^\circ$

(f) $\cos \gamma = 1,2$

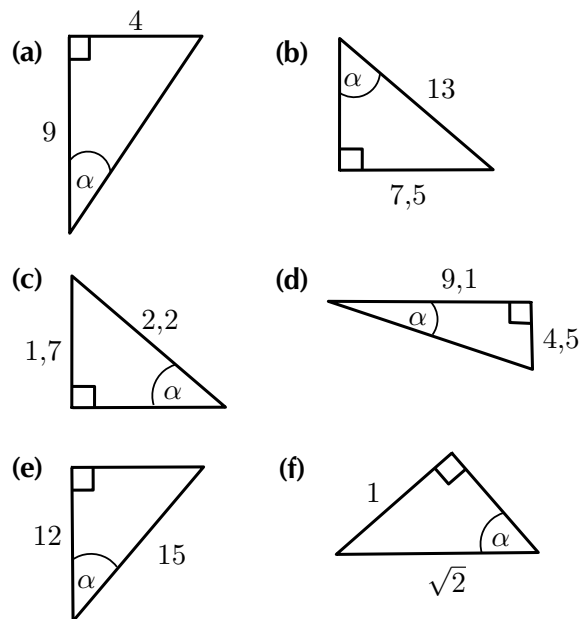
(n) $\frac{1}{2} \cos 2\beta = 0,3$

(g) $4 \cos \theta = 3$

(o) $2 \sin 3\theta + 1 = 2,6$

(h) $\cos 4\theta = 0,3$

2. Bepaal α in die volgende reghoekige driehoeke:



Meer oefening video oplossings of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02rs (2.) 02rt

7.8 Twee-dimensionele probleme

EMDCT

Trigonometrie is ontwikkel deur oerbeskawings om praktiese probleme in konstruksie en navigasie, op te los. Ons sal wys dat trigonometrie ook gebruik kan word om sekere ander praktiese probleme op te los. Ons gebruik trigonometriese funksies om probleme in twee dimensies op te los met behulp van reghoekige driehoeke.

Video: VMbkj by www.everythingmaths.co.za

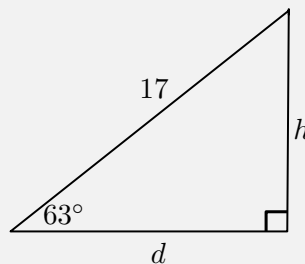
Voorbeeld 5: Die vlieg van 'n vlieër**PROBLEEM**

Mandla vlieg 'n vlieër aan 'n 17 m lyn teen 'n skuinste van 63° .

1. Wat is die hoogte h van die vlieër bo die grond?
2. As Mandla se vriend Sipho direk onder die vlieër staan, bereken die afstand d tussen die twee vriende.

OPLOSSING

Stap 1 : Teken 'n skets en identifiseer die teenoorstaande sy, die aangrensende sy en die skuinssy



Stap 2 : Gebruik die gegewens en toepaslike verhoudings om vir h en d op te los

1.

$$\begin{aligned}\sin 63^\circ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\ \sin 63^\circ &= \frac{h}{17} \\ \therefore h &= 17 \sin 63^\circ \\ &= 15,15 \text{ m}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\cos 63^\circ &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \\ \cos 63^\circ &= \frac{d}{17} \\ \therefore d &= 17 \cos 63^\circ \\ &= 7,72 \text{ m}\end{aligned}$$

Let op dat die derde sy van die driehoek ook bereken kan word deur die stelling van Pythagoras: $d^2 = 17^2 - h^2$.

Stap 3 : Skryf die finale antwoord neer

1. Die vlieër is 15,15 m bo die grond.
2. Mandla and Sipho is 7,72 m van mekaar.

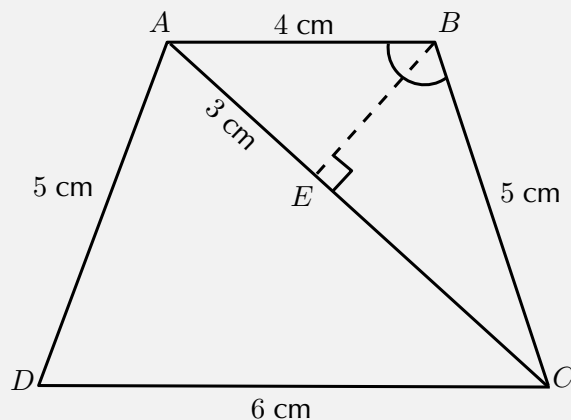
Voorbeeld 6: Berekening van hoeke

PROBLEEM

$ABCD$ is 'n trapesium met $AB = 4$ cm, $CD = 6$ cm, $BC = 5$ cm and $AD = 5$ cm. Punt E op diagonaal AC verdeel die diagonaal so dat $AE = 3$ cm. $\hat{BEC} = 90^\circ$. Vind $\hat{ABC}$.

OPLOSSING

Stap 1 : Teken die trapesium en merk al die gegewe lengtes op die diagram. Dui aan dat $\hat{BEC}$ 'n regte hoek is



Stap 2 : Gebruik $\triangle ABE$ and $\triangle CBE$ om die twee hoeke by $\hat{B}$ te bepaal

Stap 3 : Vind die eerste hoek $\hat{ABE}$

Die skuinssy en teenoorstaande sy word vir beide driehoeke gegee, dus gebruik ons die *sin* funksie:

In $\triangle ABE$,

$$\begin{aligned}\sin \hat{A}BE &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{3}{4} \\ \therefore \hat{A}BE &= 48,6^\circ\end{aligned}$$

Stap 4 : Gebruik die stelling van Pythagoras om EC te bepaal

In $\triangle ABE$,

$$\begin{aligned}BE^2 &= AB^2 - AE^2 \\ &= 4^2 - 3^2 \\ &= 7 \\ \therefore BE &= \sqrt{7} \text{ cm}\end{aligned}$$

Stap 5 : Vind die tweede hoek $\hat{C}BE$

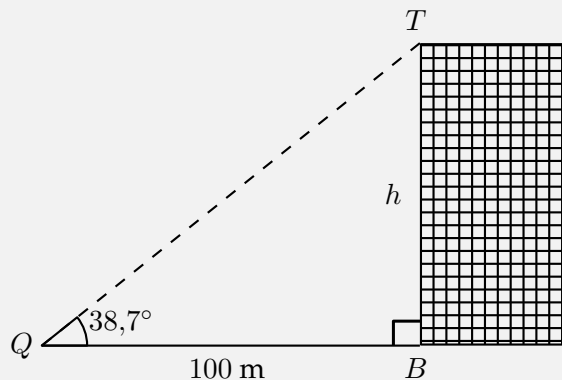
In $\triangle CBE$,

$$\begin{aligned}\cos \hat{C}BE &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{5} \\ &= 0,529 \\ \therefore \hat{C}BE &= 58,1^\circ\end{aligned}$$

Stap 6 : Bereken die som van die hoeke

$$\hat{A}BC = 48,6^\circ + 58,1^\circ = 106,7^\circ$$

Nog 'n toepassing is om trigonometrie te gebruik om die hoogte van 'n gebou te bepaal. Ons kan 'n maatband van die dak laat hang, maar dit is onprakties (en gevaarlik) vir hoë geboue. Dis veel meer sinvol om trigonometrie te gebruik.

Voorbeeld 7: Bepaling van 'n gebou se hoogte**PROBLEEM**

Die diagram toon 'n gebou van onbekende hoogte h . As ons 100 m wegstap tot by punt Q en die hoek meet van die grond na die toppunt van die gebou (T), vind ons die hoek is $38,7^\circ$. Hierdie word die elevasiehoek of hoogtehoek genoem. Ons het 'n reghoekige driehoek en ken die lengte van een sy en 'n hoek. Ons kan dus die hoogte van die gebou bereken (korrek tot die naaste meter.)

OPLOSSING

Stap 1 : **Identifiseer die teenoorstaande sy, aangrensende sy en die skuinssy**

Stap 2 :

In $\triangle QTB$,

$$\begin{aligned}\tan 38,7^\circ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} \\ &= \frac{h}{100}\end{aligned}$$

Stap 3 : **Herrangskik en los op vir h**

$$\begin{aligned}h &= 100 \times \tan 38,7^\circ \\ &= 80,1\end{aligned}$$

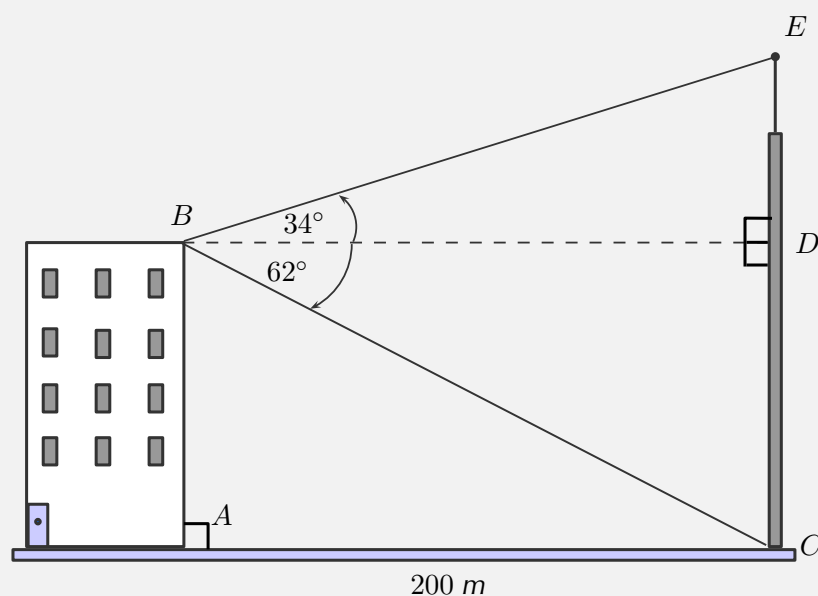
Stap 4 : **Skryf finale antwoord neer**

Die hoogte van die gebou is 80 m.

Voorbeeld 8: Hoogte - en dieptehoek**PROBLEEM**

'n Woonstelblok is 200 m van 'n selfoontoring weg. Iemand staan by B . Sy meet die hoek van B na die top van die toring E en vind dit is 34° (die hoogtehoek). Dan meet sy die hoek vanaf B na die onderpunt van die toring C en vind dit is 62° (die dieptehoek).

Wat is die hoogte van die selfoontoring (korrek tot die naaste meter)?



Let op: Die diagram is nie op skaal geteken nie.

OPLOSSING

Stap 1 : Om die hoogte CE te bepaal, bereken eers die lengtes DE en CD

$\triangle BDE$ en $\triangle BDC$ is beide reghoekige driehoeke. In elk van die driehoeke is die lengte BD bekend, dus kan ons die onbekende sye bereken.

Stap 2 : Bereken CD

Die lengte AC is gegee. $CABD$ is 'n reghoek, dus is $BD = AC = 200$ m.

In $\triangle CBD$,

$$\begin{aligned} \tan \hat{C}BD &= \frac{CD}{BD} \\ \therefore CD &= BD \times \tan \hat{C}BD \\ &= 200 \times \tan 62^\circ \\ &= 376 \text{ m} \end{aligned}$$

Stap 3 : **Bereken** DE

In $\triangle DBE$,

$$\begin{aligned} \tan \hat{DBE} &= \frac{DE}{BD} \\ \therefore DE &= BD \times \tan \hat{DBE} \\ &= 200 \times \tan 34^\circ \\ &= 135 \text{ m} \end{aligned}$$

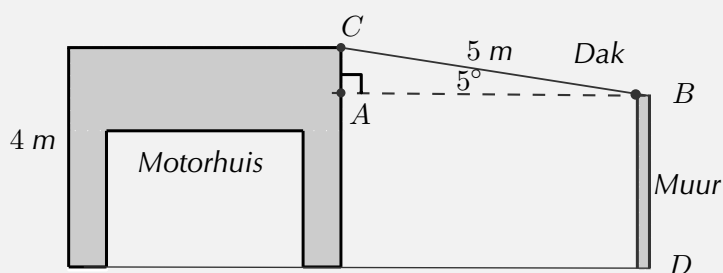
Stap 4 : Tel die twee hoogtes bymekaar om die finale antwoord te kry

Die hoogte van die selfoontoring is $CE = CD + DE = 135 \text{ m} + 376 \text{ m} = 511 \text{ m}$.

Voorbeeld 9: Bouplan

PROBLEEM

Mnr Nkosi het 'n motorhuis by sy huis en hy besluit om 'n afdak aan die kant van die motorhuis aan te bou. Die motorhuis is 4 m hoog en sy plaat vir die dak is 5 m lank. As die hoogtehoek van die dak 5° is, hoe hoog moet hy die muur BD bou? Gee die antwoord korrek tot 1 desimale plek.



OPLOSSING

Stap 1 : Identifiseer die teenoorstande sy, die aangrensende sy en die skuinssy

$\triangle ABC$ het 'n regte hoek. Die skuinssy en 'n hoek is bekend, dus kan ons AC bereken. Die hoogte van die muur BD is dan die hoogte van die motorhuis minus AC .

$$\begin{aligned}\sin \hat{ABC} &= \frac{AC}{BC} \\ \therefore AC &= BC \times \sin \hat{ABC} \\ &= 5 \sin 5^\circ \\ &= 0,4 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore BD &= 4 \text{ m} - 0,4 \text{ m} \\ &= 3,6 \text{ m}\end{aligned}$$

Stap 2 : Skryf die finale antwoord neer

Mr Nkosi moet sy muur 3,6 m hoog bou.

Oefening 7 - 5

1. 'n Seun wat 'n vlieër vlieg staan 30 m vanaf 'n punt direk onder die vlieër. As die vlieër se tou 50 m lank is, vind die hoogtehoek van die vlieër.
2. Wat is die hoogtehoek van die son as 'n boom, wat 7,15 m hoog is, 'n skaduwee van 10,1 m gooi?
3. Van 'n afstand van 300 m af kyk Susan op na die bopunt van 'n vuurtoring teen 'n hoogtehoek van 5° . Bepaal die hoogte van die vuurtoring tot die naaste meter.
4. 'n Leer met lengte 25 m rus teen 'n muur teen 'n hoek van 37° . Vind die afstand tussen die muur en die onderpunt van die leer.

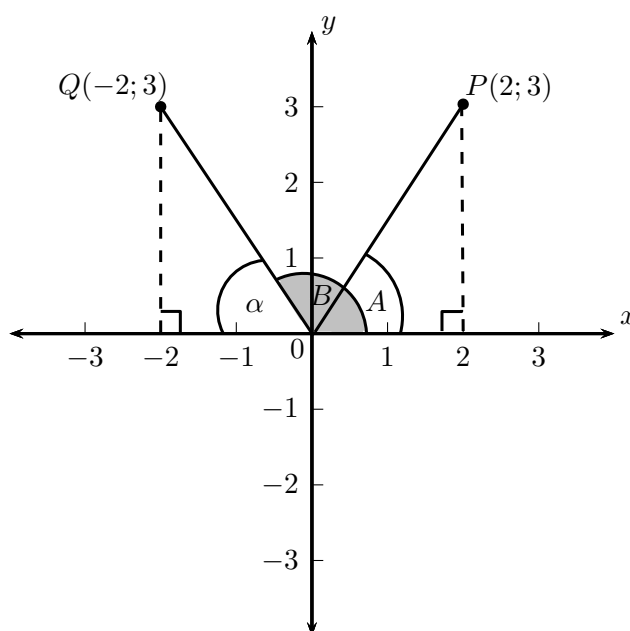
 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ru (2.) 02rv (3.) 02rw (4.) 02rx

7.9 Definisie van verhoudings in die Cartesiese vlak



Ons het trigonometriese verhoudings gedefinieer deur reghoekige driehoeke te gebruik. Ons kan hierdie definisies uitbrei na enige hoek, deur daarop te let dat die definisies nie afhanklik is van die lengte van die sye van 'n driehoek nie, maar slegs afhanklik is van die grootte van die hoek. As ons dus enige punt op 'n Cartesiese vlak stip en 'n lyn trek vanaf die oorsprong na daardie punt kan ons die hoek bereken wat die lyn met die x -as maak. In die figuur hieronder is punte P en Q reeds gemerk. 'n Lyn word vanaf die oorsprong (O) na elke punt getrek. Die stippellyne wys hoe ons reghoekige driehoeke vir elke punt kan konstrueer. Die stippellyn moet altyd na die x -as getrek word. Nou kan ons hoeke A en B vind. Ons kan ook die definisies van die omgekeerdes op dieselfde manier uitbrei.



Uit die koördinate van $P(2; 3)$ weet ons dat die lengte van die sy oorkant $\hat{A}$ 3 is en die lengte van die aangrensende sy 2. Deur $\tan \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{3}{2}$ te gebruik, bereken ons dat $\hat{A} = 56,3^\circ$ is.

Ons kan ook die stelling van Pythagoras gebruik om die skuinssy van die driehoek te bereken, dan $\hat{A}$ bereken deur $\sin \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$ of $\cos \hat{A} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$.

Beskou punt $Q(-2; 3)$. Ons definieer $\hat{B}$ as die hoek tussen die lyn OQ en die positiewe x -as. Hierdie word die standaard hoekposisie genoem. Laat $\hat{\alpha}$ die hoek tussen lyn OQ en die negatiewe x -as wees sodat $\hat{B} + \hat{\alpha} = 180^\circ$.

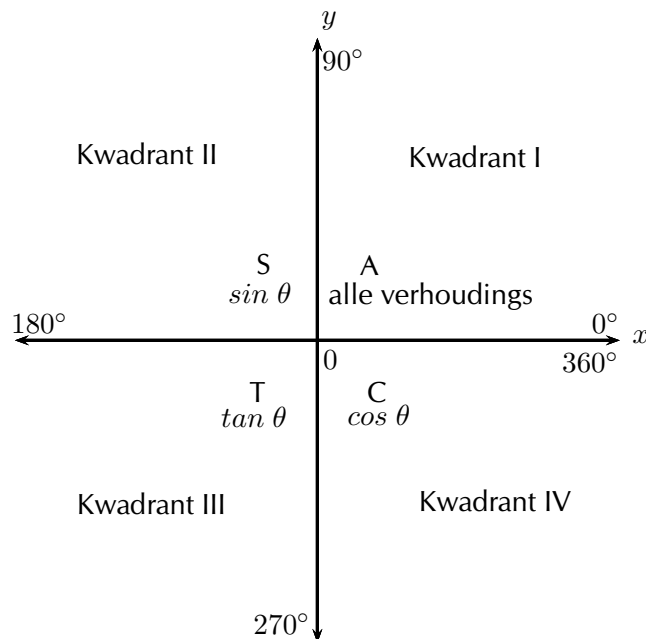
Uit die koördinate $Q(-2; 3)$ weet ons die lengte van die sy oorkant $\hat{\alpha}$ is 3 en die lengte van die aangrensende sy is 2. Deur $\tan \hat{\alpha} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{3}{2}$ bereken ons $\hat{\alpha} = 56,3^\circ$. Dus $\beta = 180^\circ - \alpha = 123,7^\circ$.

'n Alternatiewe metode is om die skuinssy deur die stelling van Pythagoras te bereken, en dan α deur $\sin \alpha = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$ of $\cos \alpha = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$ te gebruik.

Sou ons 'n sirkel trek, met die oorsprong (0) as middelpunt en deur punt P , dan is die lengte van die oorsprong tot by punt P die radius van die sirkel, wat ons aandui met r . Ons kan al die trigonometriese funksies dan in terme van x , y en r herskryf. Die algemene definisies van die trigonometriese funksies is:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Die Cartesiese vlak is verdeel in 4 kwadrate in 'n antikloksgewyse orde soos aangedui in die diagram hieronder. Let daarop dat r altyd positief is, maar dat die waardes van x en y verander afhangende van die posisie van die punt op die Cartesiese vlak. As 'n resultaat kan die trigonometriese verhoudings positiief of negatief wees. Die letters C , A , S en T dui aan watter van die funksies is positief in elke kwadrant:



Hierdie diagram staan bekend as die CAST diagram.

Kwadrant I: alle verhoudings is positief.

Kwadrant II: y waardes is positief, dus is sinus en cosecant positief.

Kwadrant III: beide x en y waardes is negatief, dus is tangens en cotangens positief.

Kwadrant IV: x waardes is positief, dus is cosinus en secant positief.

Nota: die skuinssy is altyd positief.

► Video: VMbhy by www.everythingmaths.co.za

Spesiale hoeke in die Cartesiese vlak

Wanneer ons in die Cartesiese vlak werk, sluit ons twee ander spesiale hoeke in reghoekige driehoeke in: 0° en 90° . Hierdie is spesiaal omdat ons nie gewoonlik 'n hoek van 0° of 'n hoek van 90° kan hê nie. Let op dat as $\theta = 0^\circ$, is die lengte van die teenoorstaande sy gelyk aan 0, dus

$$\sin 0^\circ = \frac{\text{teenoorstaand}}{\text{skuinssy}} = \frac{0}{\text{skuinssy}} = 0$$

As $\theta = 90^\circ$, is die lengte van die aangrensende sy gelyk aan 0, dus

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{0}{\text{skuinssy}} = 0$$

Met behulp van die definisie $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ sien ons dat vir $\theta = 0^\circ$, $\sin 0^\circ = 0$, dus

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{\cos 0^\circ} = 0$$

Vir $\theta = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, dus

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{0} = \text{ongedefineerd}$$

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ongedf

Voorbeeld 10: Verhoudings in die Cartesiese vlak

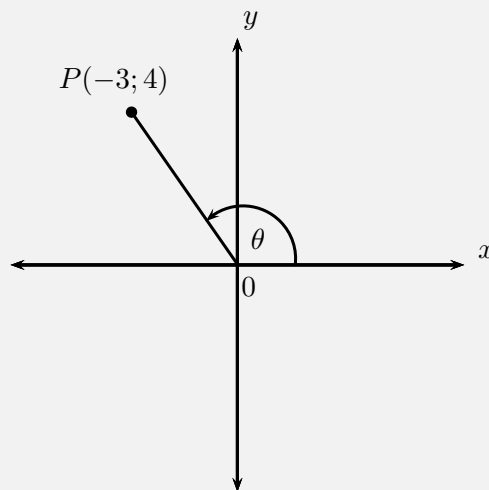
PROBLEEM

$P(-3; 4)$ is a punt in die Cartesiese vlak. $X\hat{O}P = \theta$. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van:

1. $\cos \theta$
2. $3 \tan \theta$
3. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta$

OPLOSSING

Stap 1 : **Skets punt P in die Cartesiese vlak en merk dit θ**



Stap 2 : **Gebruik Pythagoras om r te bereken**

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 \\
 &= (-3)^2 + (4)^2 \\
 &= 25 \\
 r &= \pm 5 \\
 \therefore r &= 5
 \end{aligned}$$

Stap 3 : **Vervang waardes vir x , y en r in die nodige verhoudings**

$$1. \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$2. 3 \tan \theta = 3 \left(\frac{y}{x} \right) = 3 \left(\frac{4}{-3} \right) = -4$$

$$3. \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{5}{8}$$

Voorbeeld 11: Verhoudings in die Cartesiese vlak

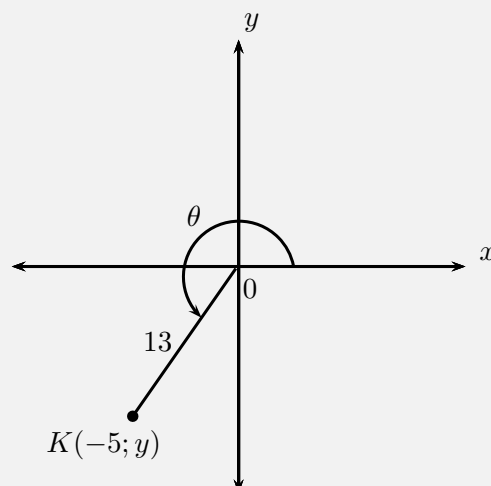
PROBLEEM

$X\hat{O}K = \theta$ is 'n hoek in die derde kwadrant en K is die punt $(-5; y)$. OK is 13 eenhede.

1. Bepaal sonder 'n rekenaar die waarde van y
2. Bewys dat $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken punt K in die Cartesiese vlak merk dit θ**



Stap 2 : **Gebruik Pythagoras om y te bereken**

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 \\
 y^2 &= r^2 - x^2 \\
 &= (13)^2 - (-5)^2 \\
 &= 169 - 25 \\
 &= 144 \\
 y &= \pm 12
 \end{aligned}$$

Gegee dat θ in die derde kwadrant val, moet y negatief wees.

$$\therefore y = -12$$

Stap 3 : **Vervang waardes vir x , y en r en vereenvoudig**

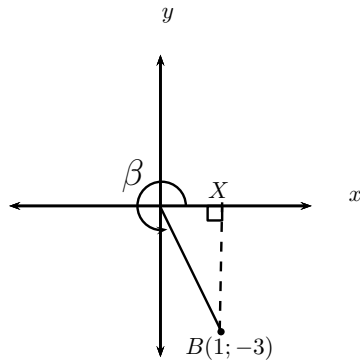
$$\begin{aligned}
 \text{LK} &= \tan^2 \theta + 1 & \text{RK} &= \sec^2 \theta \\
 &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 & &= \left(\frac{r}{x}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{-12}{-5}\right)^2 + 1 & &= \left(\frac{13}{-5}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{144}{25}\right) + 1 & &= \left(\frac{169}{25}\right)^2 \\
 &= \frac{144 + 25}{25} & &= \frac{169}{25} \\
 &= \frac{169}{25} & &= \frac{169}{25} \\
 \therefore \text{LK} &= \text{RK}
 \end{aligned}$$

Nota: Maak altyd 'n skets wanneer jy trigonometriese probleme sonder 'n sakrekenaar moet oplos.

Oefening 7 - 6

1. B is 'n punt in die Cartesiese vlak. Bepaal sonder 'n rekenaar:

- (a) Die lengte van OB
 (b) $\cos \beta$
 (c) $\operatorname{cosec} \beta$
 (d) $\tan \beta$



2. As $\sin \theta = 0,4$ en θ 'n stomphoek is, bepaal:
 (a) $\cos \theta$
 (b) $\sqrt{21} \tan \theta$
3. Gegee $\tan \theta = \frac{t}{2}$, waar $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Bepaal die volgende in terme van t :
 (a) $\sec \theta$
 (b) $\cot \theta$
 (c) $\cos^2 \theta$
 (d) $\tan^2 \theta - \sec^2 \theta$

Meer oefening video oplossings of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ry (2.) 02rz

Hoofstuk 7 | Opsomming

Opsommingsaanbieding: VMdwh by www.everythingmaths.co.za

- Ons kan drie trigonometriese verhoudings definieer vir reghoekige driehoeke: sinus ($\sin$), cosinus ($\cos$) en tangens ($\tan$).
- Elk van hierdie verhoudings het 'n omgekeerde: cosecant (cosec), secant ($\sec$) en cotangens ($\cot$).
- Ons kan die beginsels van oplossing van vergelykings en die trigonometriese verhoudings gebruik om eenvoudige trigonometriese probleme op te los.
- Ons kan probleme in twee dimensies oplos met reghoekige driehoeke.

- Vir sekere spesiale hoeke kan ons die waardes van $\sin$, $\cos$ en $\tan$ maklik bepaal sonder 'n sakrekenaar.
- Ons kan die definisies van die trigonometriese funksies uitbrei na hoeke van enige grootte.
- Trigonometrie word gebruik om probleme op te los, soos om die hoogte van 'n gebou te bepaal.

Hoofstuk 7

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ + \tan 45^\circ$$

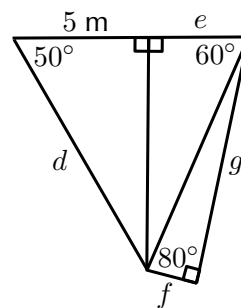
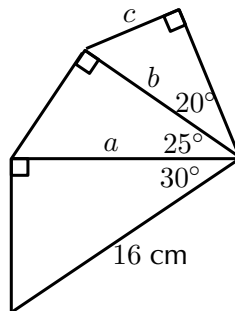
2. As $3 \tan \alpha = -5$ en $0^\circ < \alpha < 270^\circ$, gebruik 'n skets om te bepaal:

- (a) $\cos \alpha$
 (b) $\tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha$

3. Los op vir θ as θ 'n positiewe skerphoek is:

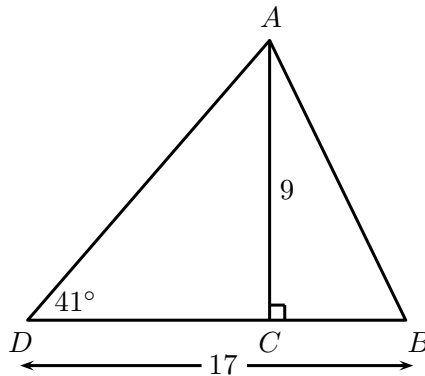
- (a) $2 \sin \theta = 1,34$
 (b) $1 - \tan \theta = -1$
 (c) $\cos 2\theta = \sin 40^\circ$
 (d) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$

4. Bereken die onbekende sylengtes in die diagramme hieronder:

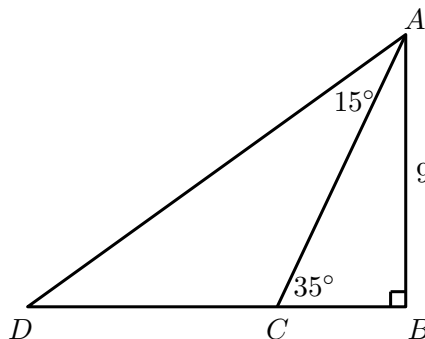


5. In $\triangle PQR$, $PR = 20$ cm, $QR = 22$ cm en $\hat{P}RQ = 30^\circ$. Die loodlyn vanaf P na QR kruis QR by X . Bereken:
- (a) die lengte XR
 (b) die lengte PX
 (c) die hoek $\hat{Q}PX$
6. 'n Leer met lengte 15 m rus teen 'n muur. Die voet van die leer is 5 m van die muur af. Vind die hoek tussen die muur en die leer.

7. In die volgende driehoek, vind hoek $\hat{A}BC$:



8. In die volgende driehoek, vind die lengte van sy CD :



9. Gegee $A(5; 0)$ en $B(11; 4)$, vind die hoek tussen die x -as en die lyn deur A en B .
10. Gegee $C(0; -13)$ en $D(-12; 14)$, vind die hoek tussen die lyn deur C en D en die y -as.
11. 'n Reghoekige driehoek het 'n skuinssy van 13 mm. Vind die lengte van die ander twee sye as een van die hoeke van die driehoek 50° is.
12. Een van die hoeke van 'n rombus met omtrek 20 cm is 30° .
- Vind die sylengte van die rombus.
 - Vind die lengtes van beide diagonale.
13. Kaptein Jack seil na 'n krans met 'n hoogte van 10 m.
- As die afstand vanaf die boot na die bokant van die krans 30 m is, bereken die hoogtehoek vanaf die boot na die bokant van die krans (korrek tot die naaste heelgetal).
 - As die boot 7 m nader aan die krans seil, wat is die nuwe hoogtehoek vanaf die boot na die bokant van die krans?
14. Gegee die punte $E(5; 0)$; $F(6; 2)$ en $G(8; -2)$, vind die hoek $\hat{F}EG$.
15. 'n Driehoek met hoeke 40° ; 40° en 100° het 'n omtrek van 20 cm. Vind die lengte van elke sy van die driehoek.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

- (1.) 02s0 (2.) 02s1 (3.) 02s2 (4.) 02s3 (5.) 02s4 (6.) 02s5
(7.) 02s6 (8.) 02s7 (9.) 02s8 (10.) 02s9 (11.) 02sa (12.) 02sb
(13.) 02sc (14.) 02sd (15.) 02se

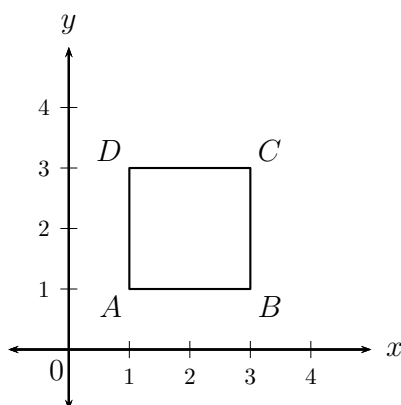
Analitiese meetkunde, ook bekend as koördinaatmeetkunde en vroër bekend as Cartesiese meetkunde, is die studie van meetkunde op grond van die beginsels van algebra en die Cartesiese koördinaatstelsel. Dit is op die definisie van meetkundige figure op 'n numeriese wyse gebaseer en onttrek numeriese inligting uit die voorstelling. Sommige beskou die ontwikkeling van analitiese meetkunde as die begin van moderne wiskunde.

▶ Video: VMbkm by www.everythingmaths.co.za

8.1 Figures op die Cartesiese vlak

www EMDCV

As ons die koördinate van die hoekpunte van 'n figuur het, dan kan ons die figuur op die Cartesiese vlak teken. Byvoorbeeld, neem die vierhoek $ABCD$ met koördinate $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;3)$ en $D(1;3)$ en stel dit voor op die Cartesiese vlak.



Die volgorde van die letters waarmee ons die figuur benoem, is belangrik. Dit dui vir ons aan dat ons beweeg van punt A na punt B , B na punt C , C na punt D en dan weer terug na punt A . Dit sou ook reg wees om te skryf vierkant $CBAD$ of $BADC$ maar dit is beter om die konvensie te volg om die letters in alfabetiese volgorde te skryf.

8.2 Afstand tussen twee punte



'n Punt is 'n eenvoudige meetkundige voorwerp met ligging (posisie) as enigste eienskap.

DEFINISIE: Punt

'n Punt is 'n geordende getallepaar wat geskryf word as $(x; y)$.

DEFINISIE: Afstand

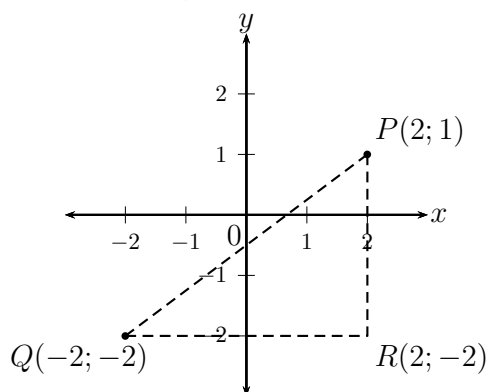
Afstand is 'n getal wat beskryf hoe ver twee punte van mekaar is.

Onderzoek:

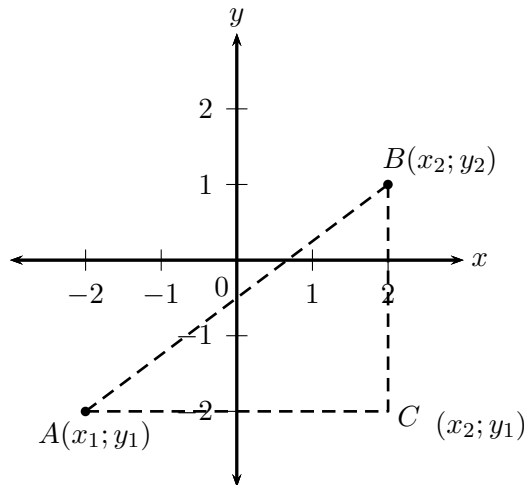
Afstand tussen twee punte

Punte $P(2; 1)$, $Q(-2; -2)$ en $R(2, -2)$ word gegee.

- Kan ons aanvaar dat $\hat{R} = 90^\circ$? Indien wel, hoekom?
- Gebruik die stelling van Pythagoras in $\triangle PQR$ om die lengte van PQ te vind.



Die formule vir die berekening van die afstand tussen twee punte word as volg afgelei. Die afstand tussen twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$, word afgelei deur gebruik te maak van die stelling van Pythagoras:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

Ons sien

$$AC = x_2 - x_1$$

$$BC = y_2 - y_1$$

Dan is

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Gevolgtik, vir enige twee punte, $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$, is die formule:

$$\text{Afstand tussen twee punte } d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Let daarop dat $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$.

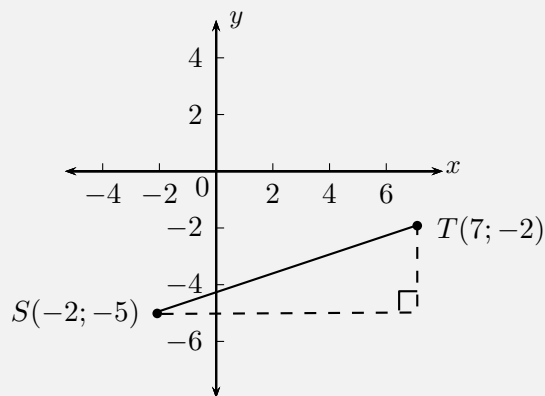
📺 Video: VMbls by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 1: Gebruik van afstandformule**PROBLEEM**

Vind die afstand tussen $S(-2; -5)$ en $Q(7; -2)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Ken waardes toe aan** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

Gestel die koördinate van punt S is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van punt T is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = -2 \quad y_1 = -5 \quad x_2 = 7 \quad y_2 = -2$$

Stap 3 : **Skryf die afstandformule neer**

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Stap 4 : **Vervang waardes**

$$\begin{aligned}
 d_{ST} &= \sqrt{(-2-7)^2 + (-5-(-2))^2} \\
 &= \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{81+9} \\
 &= \sqrt{90} \\
 &= 9,5
 \end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord neer**

Die afstand tussen S en T is 9,5 eenhede.

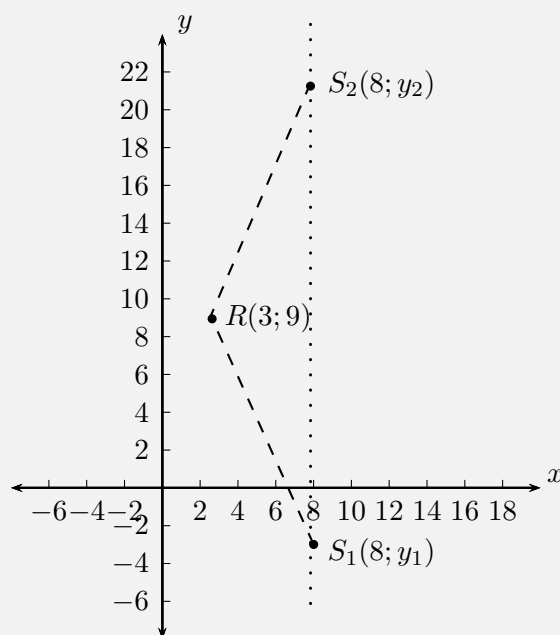
Voorbeeld 2: Gebruik die afstandformule

PROBLEEM

Gegee $RS = 13$, $R(3; 9)$ en $S(8; y)$, vind y .

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Gestel die koördinate van R is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van punt S is $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 9 \quad x_2 = 8 \quad y_2 = y$$

Stap 3 : Skryf die afstandformule neer

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Stap 4 : Vervang waardes en los op vir y

$$13 = \sqrt{(3 - 8)^2 + (9 - y)^2}$$

$$13^2 = (-5)^2 + (81 - 18y + y^2)$$

$$0 = y^2 - 18y - 63$$

$$= (y + 3)(y - 21)$$

$$\therefore y = -3 \text{ of } y = 21$$

Stap 5 : Skryf die finale antwoord neer

S is $(8; -3)$ of $(8; 21)$.

Belangrik: Teken altyd 'n skets - dit help met jou berekening en ook om te kontroleer of jou antwoord reg kan wees.

Oefening 8 - 1

1. Vind die lengte van AB as:

(a) $A(2; 7)$ en $B(-3; 5)$

(b) $A(-3; 5)$ en $B(-9; 1)$

(c) $A(x; y)$ en $B(x + 4; y - 1)$

2. Die lengte van $CD = 5$. Vind die onbekende koördinaat as:

(a) $C(6; -2)$ en $D(x; 2)$

(b) $C(4; y)$ en $D(1; -1)$

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ip (2.) 02iq

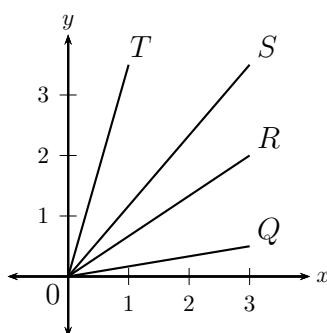
8.3 *Berekening van gradiënt*

 EMDCX

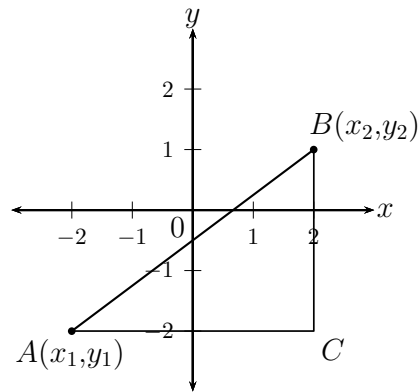
DEFINISIE: *Die gradiënt van die lyn*

Gradiënt is die verhouding tussen die vertikale verandering in posisie en die horisontale verandering in posisie.

Die gradiënt m van 'n reguitlyn beskryf hoe steil die lyn is, met ander woorde hoe groot die helling van die lyn is. In die figuur hieronder is lyn OQ se helling die kleinste en die gradiënt van lyn OT is die grootste want die lyn is die steilste.



Om die formule vir gradiënt af te lei, beskou ons 'n lyn met koördinate $A (x_1; y_1)$ en $B (x_2; y_2)$ met skuinssy AB , soos in die diagram hieronder getoon. Die gradiënt is die verhouding van die lengte van die vertikale sy van die driehoek tot die horisontale sy. Die vertikale sylengte is die verskil tussen die y -waardes van punt A en punt B . Die lengte van die horisontale sy van die driehoek is die verskil tussen die x -waardes van A en B .



Dus word die gradiënt met die volgende formule bereken:

$$\text{Gradiënt } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ of } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Belangrik: Onthou om konsekwent te wees: $m \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

► Video: VMbmr by www.everythingmaths.co.za

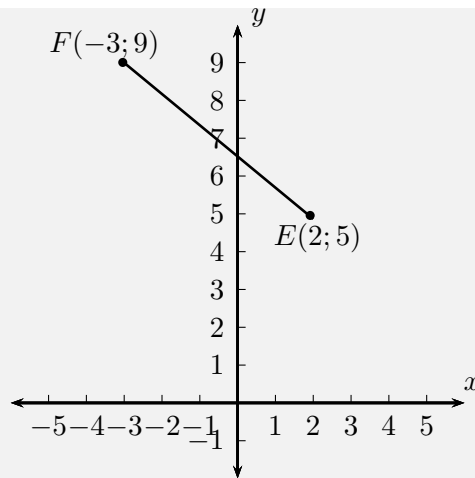
Voorbeeld 3: Gradiënt tussen twee punte

PROBLEEM

Vind die gradiënt van die lyn tussen twee punte $E(2; 5)$ en $F(-3; 9)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Ken waardes toe aan** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

Laat die koördinate van E $(x_1; y_1)$ wees en die koördinate van F $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 5 \quad x_2 = -3 \quad y_2 = 9$$

Stap 3 : **Skryf die formule vir gradiënt neer**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4 : **Vervang bekende waardes**

$$\begin{aligned} m_{EF} &= \frac{9 - 5}{-3 - 2} \\ &= \frac{4}{-5} \end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

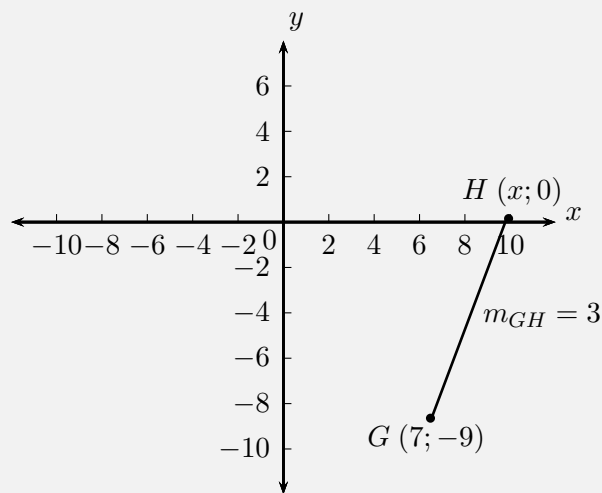
$$\text{Die gradiënt van } EF = -\frac{4}{5}$$

Voorbeeld 4: Gradiënt tussen twee punte**PROBLEEM**

Gegee $G(7; -9)$ en $H(x; 0)$, met $m_{GH} = 3$. Vind x .

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Ken waardes toe aan** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

Laat die koördinate van G $(x_1; y_1)$ wees en die koördinate van H $(x_2; y_2)$.

$$x_1 = 7 \quad y_1 = -9 \quad x_2 = x \quad y_2 = 0$$

Stap 3 : **Skryf die formule vir gradiënt neer**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4 : **Vervang waardes en los op vir** x

$$\begin{aligned}
 3 &= \frac{0 - (-9)}{x - 7} \\
 3(x - 7) &= 9 \\
 x - 7 &= \frac{9}{3} \\
 x - 7 &= 3 \\
 x &= 3 + 7 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord neer**

Die koördinate van H is $(10; 0)$.

Oefening 8 - 2

1. Vind die gradiënt van AB as:

- (a) $A(7; 10)$ en $B(-4; 1)$
- (b) $A(-5; -9)$ en $B(3; 2)$
- (c) $A(x - 3; y)$ en $B(x; y + 4)$

2. Die gradiënt van $CD = \frac{2}{3}$, vind p as:

- (a) $C(16; 2)$ en $D(8; p)$
- (b) $C(3; 2p)$ en $D(9; 14)$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ir (2.) 02is

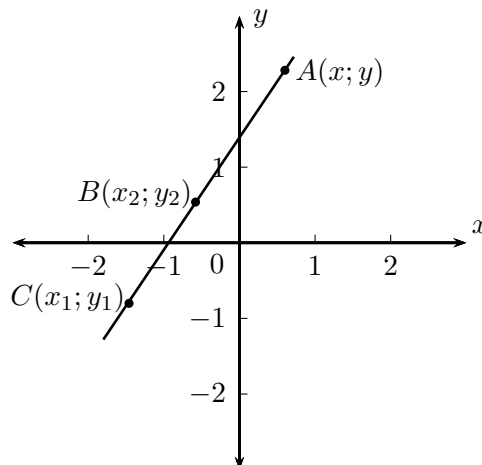
Reguitlyn



DEFINISIE: Reguitlyn

'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee van die punte.

Beskou die diagram hieronder met punte $A(x; y)$, $B(x_2; y_2)$ en $C(x_1; y_1)$ wat op 'n reguitlyn lê.



Ons het $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$ en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Die algemene formule vir 'n reguitlyn is $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ waar $(x; y)$ enige punt op die reguitlyn is.

Hierdie formule kan ook as $y - y_1 = m(x - x_1)$ beskryf word.

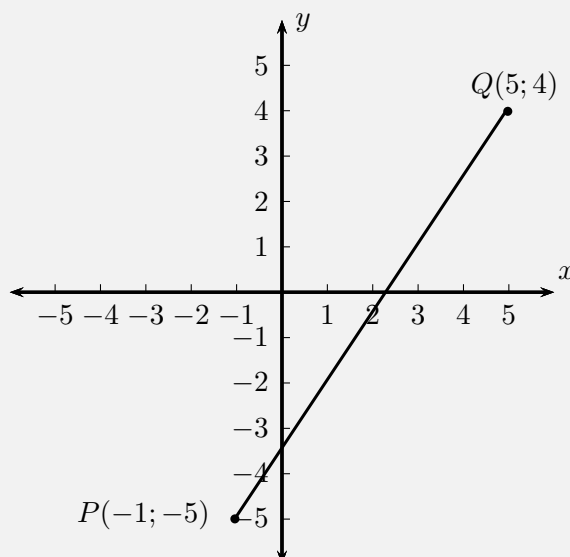
Die standaardvorm van die reguitlynvergelyking is $y = mx + c$ waar m die gradiënt is en c die y -afsnit.

Voorbeeld 5: Vind die vergelyking van 'n reguitlyn**PROBLEEM**

Vind die vergelyking van 'n reguitlyn deur $P(-1; -5)$ en $Q(5; 4)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Ken waardes toe**

Laat $(x; y)$ enige punt op die lyn wees.

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -5 \quad x_2 = 5 \quad y_2 = 4$$

Stap 3 : **Skryf die algemene formule neer**

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4 : **Vervang waardes en maak y die onderwerp van die vergelyking**

$$\frac{y - (-5)}{x - (-1)} = \frac{4 - (-5)}{5 - (-1)}$$

$$\frac{y + 5}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

$$2(y + 5) = 3(x + 1)$$

$$2y + 10 = 3x + 3$$

$$2y = 3x - 7$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Stap 5 : Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die reguitlyn is $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Ewewydige en loodregte lyne



Twee lyne wat ewewydig is aan mekaar het gelyke gradiënte. As twee lyne mekaar loodreg sny, dan is die produk van hulle gradiënte -1 .

As $WX \perp YZ$ sal $m_{WX} \times m_{YZ} = -1$. Loodregte lyne se gradiënte is die negatiewe inverses van mekaar.

📺 Video: VMbon by www.everythingmaths.co.za

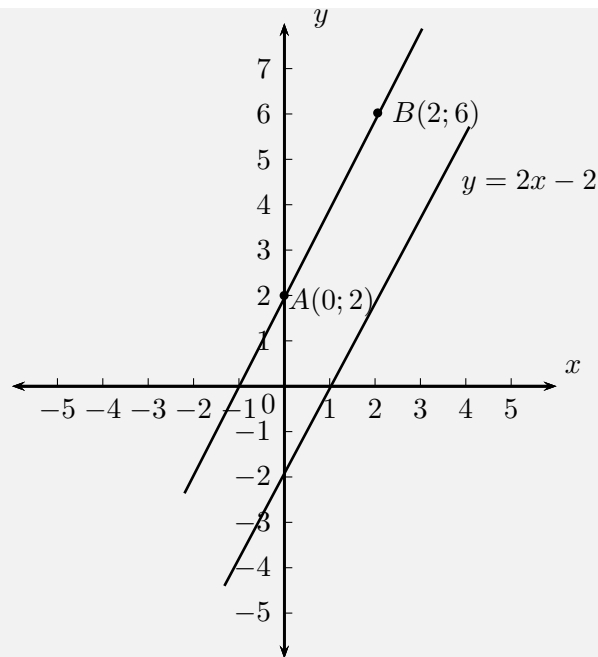
Voorbeeld 6: Ewewydige lyne

PROBLEEM

Bewys lyn AB met $A(0; 2)$ en $B(2; 6)$ is ewewydig aan die lyn $2x - y = 2$.

OPLOSSING

Stap 1 : Teken 'n skets



(Wees versigtig - soms mag lyne ewewydig lyk terwyl hulle nie is nie!)

Stap 2 : **Skryf die formule vir gradiënt neer**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 3 : **Vervang waardes om die gradiënt van AB te vind**

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{6 - 2}{2 - 0} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4 : **Maak seker die vergelyking is in standaardvorm $y = mx + c$**

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ y &= 2x - 2 \\ \therefore m_{CD} &= 2 \end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

$$m_{AB} = m_{CD}$$

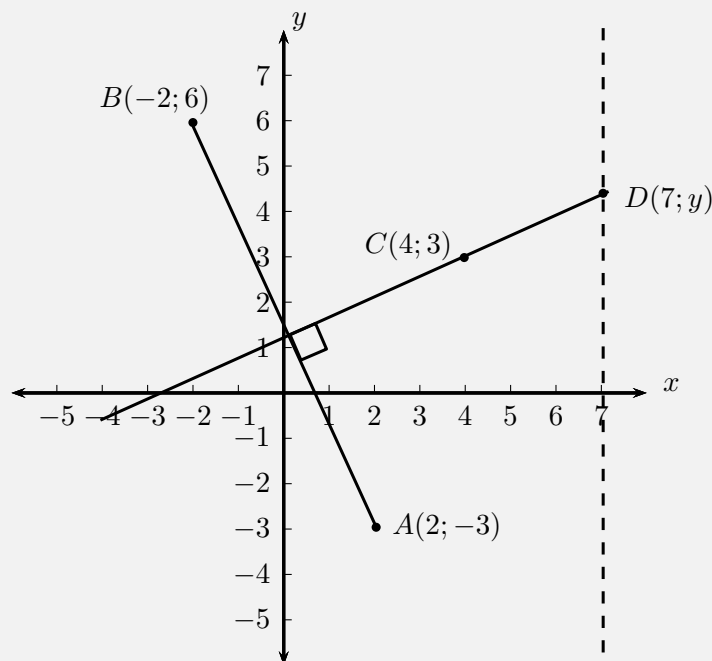
dus is lyn AB ewewydig aan $y = 2x - 2$.

Voorbeeld 7: Loodregte lyne**PROBLEEM**

Lyn AB is loodreg op lyn CD . Vind y as $A(2; -3)$, $B(-2; 6)$, $C(4; 3)$ en $D(7; y)$ gegee word.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Skryf neer die verband tussen die gradiënte van loodregte lyne AB en CD**

$$m_{AB} \times m_{CD} = -1$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -1$$

Stap 3 : **Vervang waardes en los op vir y**

$$\begin{aligned}\frac{6 - (-3)}{-2 - 2} \times \frac{y - 3}{7 - 4} &= -1 \\ \frac{9}{-4} \times \frac{y - 3}{3} &= -1 \\ \frac{y - 3}{3} &= -1 \times \frac{-4}{9} \\ \frac{y - 3}{3} &= \frac{4}{9} \\ y - 3 &= \frac{4}{9} \times 3 \\ y - 3 &= \frac{4}{3} \\ y &= \frac{4}{3} + 3 \\ &= \frac{4 + 9}{3} \\ &= \frac{13}{3} \\ &= 4\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Dus is die koördinate van D $(7; 4\frac{1}{3})$.

Horisontale en vertikale lyne



'n Lyn wat ewewydig aan die x -as is, word 'n horisontale lyn genoem en het 'n gradiënt van zero, want daar is geen vertikale verandering in die helling van die lyn nie:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{0}{\text{verandering in } x} = 0$$

'n Lyn wat ewewydig loop aan die y -as, word 'n vertikale lyn genoem en sy gradiënt is ongedefinieerd, want daar is geen horisontale verandering in die helling van die lyn nie:

$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{\text{verandering in } y}{0} = \text{ongedefinieerd}$$

Punte op 'n lyn



'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee punte. Daar is verskeie metodes om te bewys dat punte op dieselfde reguitlyn lê, bv. die gradiënt metode en 'n langer metode wat die afstandsformule gebruik.

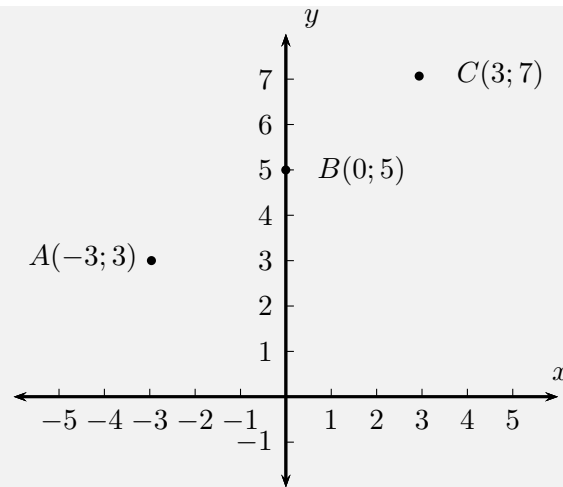
Voorbeeld 8: Punte op 'n lyn

PROBLEEM

Bewys dat $A(-3; 3)$, $B(0; 5)$ en $C(3; 7)$ op dieselfde reguitlyn lê.

OPLOSSING

Stap 1 : **Stip die punte**



Stap 2 : **Bereken twee gradiënte tussen enige twee van die drie punte**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{5 - 3}{0 - (-3)} = \frac{2}{3}$$

en

$$m_{BC} = \frac{7 - 5}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

OF

$$m_{AC} = \frac{3 - 7}{-3 - 3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

en

$$m_{BC} = \frac{7 - 5}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

Stap 3 : **Verduidelik jou antwoord**

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Dus lê die punte A , B en C op dieselfde reguitlyn.

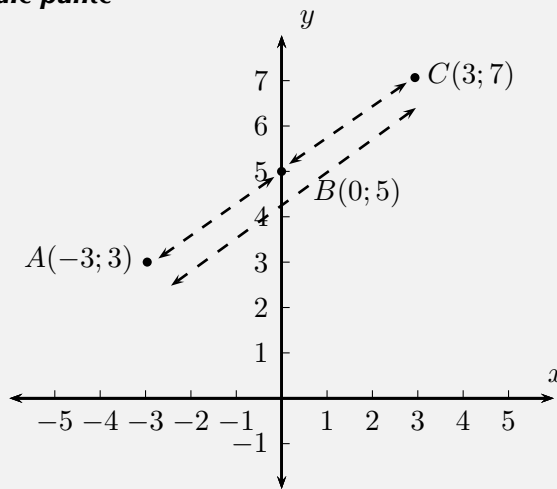
Om te bewys die punte reglynig is met behulp van die afstand formule, moet ons die afstande tussen elke paar punte bereken en dan bewys dat die som van die twee korter afstande gelyk is aan die langste afstand.

Voorbeeld 9: Punte op 'n reguitlyn**PROBLEEM**

Bewys dat $A(-3; 3)$, $B(0; 5)$ en $C(3; 7)$ op dieselfde reguitlyn lê.

OPLOSSING

Stap 1 : **Stip die punte**



Stap 2 : **Bereken die drie afstande AB , BC en AC**

$$d_{AB} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$d_{AC} = \sqrt{((-3) - 3)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Stap 3 : **Vind die som van die twee korter afstande**

$$d_{AB} + d_{BC} = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{52}$$

Stap 4 : **Verduidelik jou antwoord**

$$d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$$

Dus lê punte A , B en C op dieselfde reguitlyn.

Oefening 8 - 3

1. Bepaal of AB ewewydig aan of loodreg op CD is, of nie een van die twee nie:
 - (a) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(7; 23)$
 - (b) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(0; -4)$
 - (c) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(1; 2)$
2. Bepaal of die volgende punte op dieselfde reguitlyn lê:
 - (a) $E(0; 3)$, $F(-2; 5)$, $G(2; 1)$
 - (b) $H(-3; -5)$, $I(-0; 0)$, $J(6; 10)$
 - (c) $K(-6; 2)$, $L(-3; 1)$, $M(1; -1)$
3. Punte $P(-6; 2)$, $Q(2; -2)$ en $R(-3; r)$ lê op 'n reguitlyn. Vind die waarde van r .
4. Lyn PQ met $P(-1; -7)$ en $Q(q; 0)$ het 'n gradiënt van 1. Vind q .

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02it (2.) 02iu (3.) 02iv (4.) 02iw

8.4 Middelpunt van 'n lynstuk

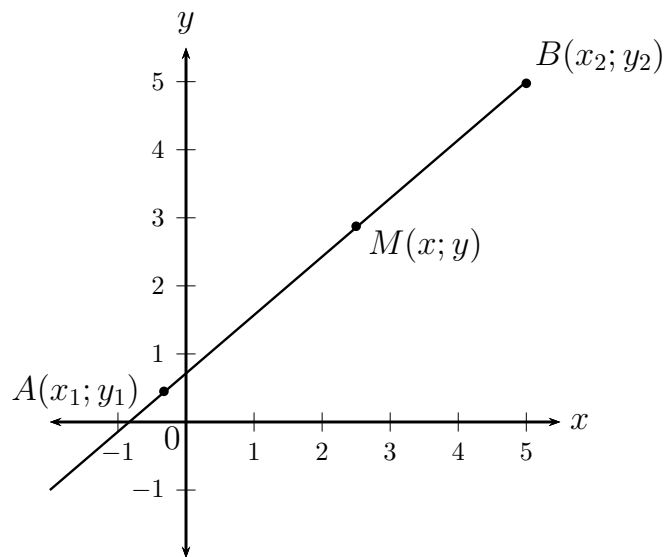

Onderzoek:

Vind die middelpunt van 'n lynstuk

Stip punte $P(2; 1)$ en $Q(-2; 2)$ akkuraat op grafiekpapier en trek lyn PQ .

- Vou die papier so dat punt P presies op punt Q val.
- Merk die punt waar die voulyn die lyn PQ kruis as S .
- Tel die blokkies en vind presiese posisie van S .
- Skryf die koördinate van S neer.

Die koördinate van die middelpunt $M(x; y)$ van 'n lyn tussen enige twee punte A en B met koördinate $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$ word as volg bereken:



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Hieruit kry ons die middelpunt van 'n lynstuk:

$$\text{Middelpunt } M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

▶ Video: VMbpr by www.everythingmaths.co.za

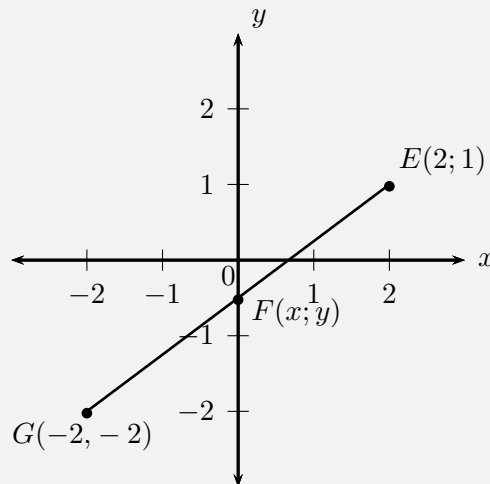
Voorbeeld 10: Berekening van middelpunt

PROBLEEM

Bereken die koördinate van die middelpunt $F(x; y)$ van die lyn tussen punt $E(2; 1)$ en punt $G(-2; -2)$.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken 'n skets**



Stap 2 : **Ken waardes toe aan** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

$$x_1 = -2 \quad y_1 = -2 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 1$$

Stap 3 : **Skryf die formule vir middelpunt neer**

$$F(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Stap 4 : **Vervang waardes in die middelpunt formule**

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
 &= \frac{-2 + 2}{2} \\
 &= 0 \\
 y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 &= \frac{-2 + 1}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Stap 5 : Skryf die antwoord

Die middelpunt is $F(0; -\frac{1}{2})$.

Stap 6 : Bevestig die antwoord met die afstandformule

Dit kan bewys word dat die afstande vanaf die eindpunte na die middelpunt gelyk is:

$$\begin{aligned}
 PS &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(0 - 2)^2 + (-0,5 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-1,5)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 2,25} \\
 &= \sqrt{6,25}
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 QS &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-0,5 - (-2))^2} \\
 &= \sqrt{(0 + 2)^2 + (-0,5 + 2)^2} \\
 &= \sqrt{(2)^2 + (-1,5)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 2,25} \\
 &= \sqrt{6,25}
 \end{aligned}$$

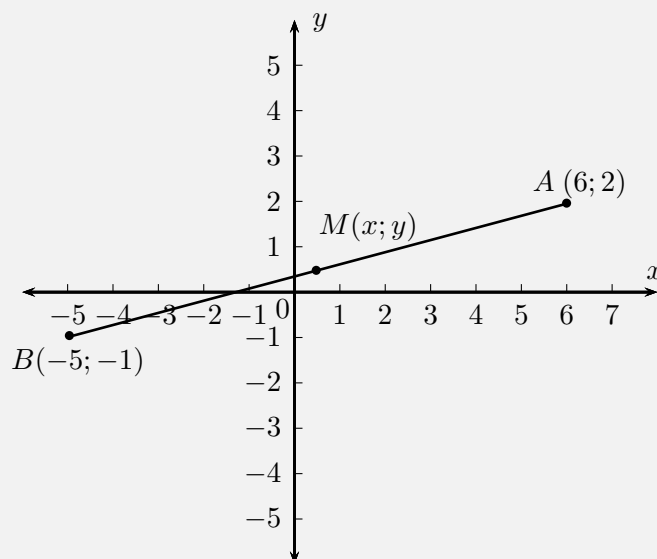
Daar kan gesien word dat $PS = QS$ soos verwag is, dus is F die middelpunt.

Voorbeeld 11: Berekening van die middelpunt**PROBLEEM**

Vind die middelpunt van lynstuk AB , as $A(6; 2)$ en $B(-5; -1)$ is.

OPLOSSING

Stap 1 : ***Maa*k 'n skets**



Vanaf die skets skat ons M sal in kwadrant I lê, met positiewe x - en y -koördinate.

Stap 2 : ***Ken waardes toe aan*** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

Laat M die punt $(x; y)$ wees

$$x_1 = 6 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = -5 \quad y_2 = -1$$

Stap 3 : ***Skryf die middelpunt formule neer***

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Stap 4 : **Vervang waardes en vereenvoudig**

$$\left(\frac{6-5}{2}; \frac{2-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord**

$M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ is die middelpunt van lynstuk AB .

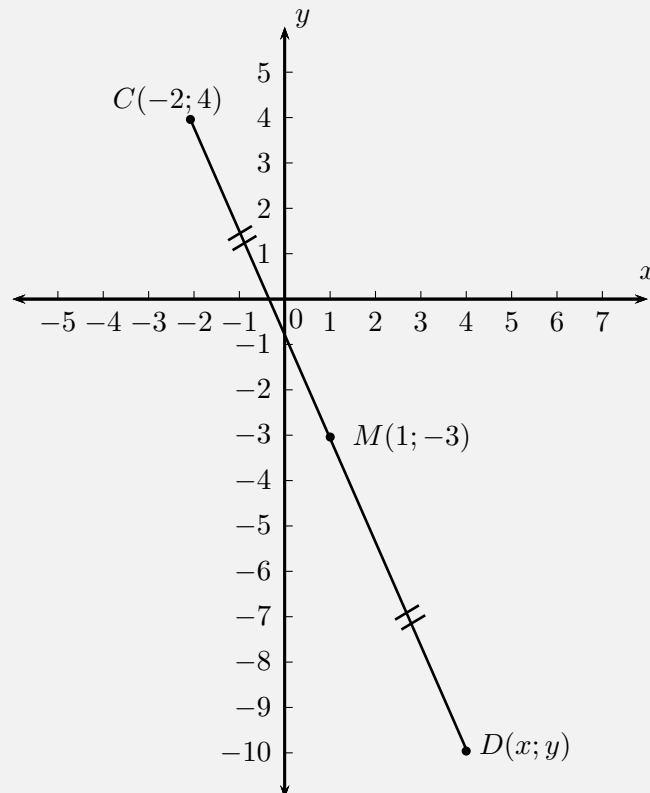
Voorbeeld 12: Gebruik die middelpuntformule

PROBLEEM

Die lynstuk wat $C(-2; 4)$ en $D(x; y)$ verbind, het middelpunt $M(1; -3)$. Vind punt D .

OPLOSSING

Stap 1 : **Maak 'n skets**



Vanaf die skets skat ons dat D in kwadrant IV sal lê, met 'n positiewe x - en 'n negatiewe y -koördinaat.

Stap 2 : **Ken waardes toe aan** $(x_1; y_1)$ **en** $(x_2; y_2)$

Laat die koördinate van $C(x_1; y_1)$ en die koördinate van $D(x_2; y_2)$ wees.

$$x_1 = -2 \quad y_1 = 4 \quad x_2 = x \quad y_2 = y$$

Stap 3 : **Skryf die middelpuntformule neer**

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Stap 4 : **Vervang waardes en los op vir x en y**

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-2 + x_2}{2} & -3 &= \frac{4 + y_2}{2} \\ 1 \times 2 &= -2 + x_2 & -3 \times 2 &= 4 + y_2 \\ 2 &= -2 + x_2 & -6 &= 4 + y_2 \\ x_2 &= 2 + 2 & y_2 &= -6 - 4 \\ x_2 &= 4 & y_2 &= -10 \end{aligned}$$

Stap 5 : **Skryf die finale antwoord neer**

Die koördinate van punt D is $(4; -10)$.

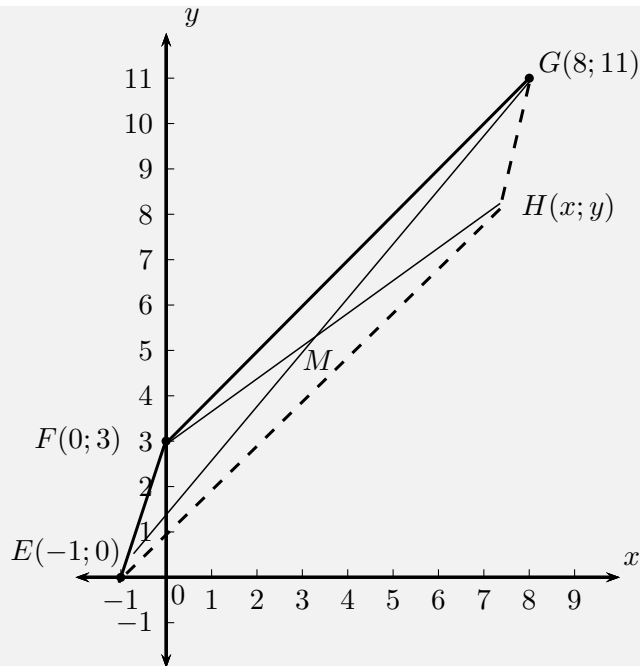
Voorbeeld 13: Gebruik middelpuntformule

PROBLEEM

Punte $E(-1; 0)$, $F(0; 3)$, $G(8; 11)$ en $H(x; y)$ is op die Cartesiese vlak. Vind $H(x; y)$ as $EFGH$ 'n parallelogram is.

OPLOSSING

Stap 1 : **Maak 'n skets**



Metode: die diagonale van 'n parallelogram halveer mekaar, daarom sal die middelpunt van EG ook die middelpunt van FH wees. Ons moet eerste die middelpunt van EG kry en dit dan gebruik om die koördinate van H te kry.

Stap 2 : Ken waardes toe aan $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

Laat $M(x; y)$ die middelpunt van EG wees.

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 8 \quad y_2 = 11$$

Stap 3 : Skryf die middelpuntformule neer

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Stap 4 : Vervang waardes en bereken die koördinate van M

$$M(x; y) = \left(\frac{-1 + 8}{2}, \frac{0 + 11}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

Stap 5 : Gebruik die koördinate van M om H te vind

M is ook 'n middelpunt van FH , so ons gebruik $M(\frac{7}{2}; \frac{11}{2})$ en $F(0; 3)$ om $H(x; y)$ te vind.

Stap 6 : Vervang waardes en los op vir x en y

$$M\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\frac{7}{2} = \frac{0 + x}{2}$$

$$7 = x + 0$$

$$x = 7$$

$$\frac{11}{2} = \frac{3 + y}{2}$$

$$11 = 3 + y$$

$$y = 8$$

Stap 7 : Skryf die finale antwoord

Die koördinate van H is $(7; 8)$.

Oefening 8 - 4

1. Vind die middelpunt van die volgende lynstukke:
 - (a) $A(2; 5)$, $B(-4; 7)$
 - (b) $C(5; 9)$, $D(23; 55)$
 - (c) $E(x + 2; y - 1)$, $F(x - 5; y - 4)$
2. M , die middelpunt van PQ is $(3; 9)$. Vind P as $Q(-2; 5)$ is.
3. $PQRS$ is 'n parallelogram met punte $P(5; 3)$, $Q(2; 1)$ en $R(7; -3)$. Vind punt S .

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ix (2.) 02iy (3.) 02iz

Hoofstuk 8 | Opsomming

📄 Opsommingsaanbieding: by www.everythingmaths.co.za

- 'n Punt is 'n geordende getallepaar geskryf as $(x; y)$.
- Afstand is 'n maatstaf van die lengte van die lyn tussen twee punte.
- Die formule van die afstand tussen twee punte is:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Die gradiënt tussen twee punte is die verhouding tussen die vertikale verandering en die horisontale verandering.
- Die formule van die gradiënt van 'n lyn is:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- 'n Reguitlyn is 'n versameling punte met 'n konstante gradiënt tussen enige twee van die punte.
- Die standaardvorm van 'n reguitlynvergelyking is $y = mx + c$.
- Die vergelyking van 'n reguitlyn kan ook geskryf word as:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- As twee lyne parallel is, sal hulle dieselfde gradiënt hê.
- As twee lyne loodreg op mekaar is, dan het ons die produk van die gradiënte gelyk aan -1 .
- Die gradiënt van 'n horisontale lyn is 0.
- Die gradiënt van 'n vertikale lyn is ongedefinieerd.
- Die formule om die middelpunt van die lyn tussen twee punte te vind:

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

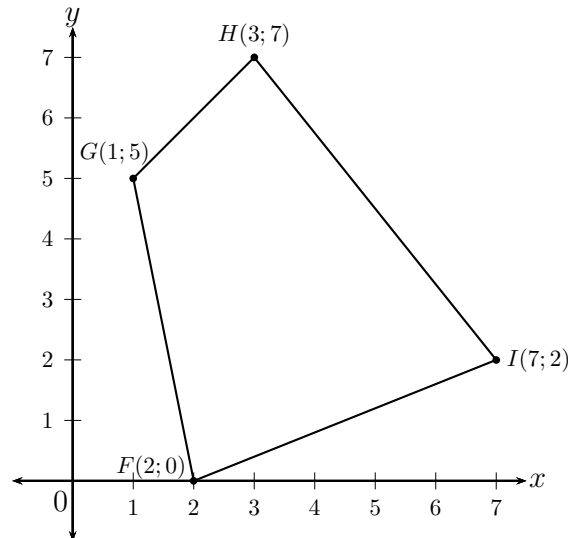
Hoofstuk 8

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Stel die volgende vorms op die Cartesiese vlak voor:

- (a) Driehoek DEF met $D(1; 2)$, $E(3; 2)$ en $F(2; 4)$
- (b) Vierhoek $GHIJ$ met $G(2; -1)$, $H(0; 2)$, $I(-2; -2)$ en $J(1; -3)$
- (c) Vierhoek $MNOP$ met $M(1; 1)$, $N(-1; 3)$, $O(-2; 3)$ en $P(-4; 1)$

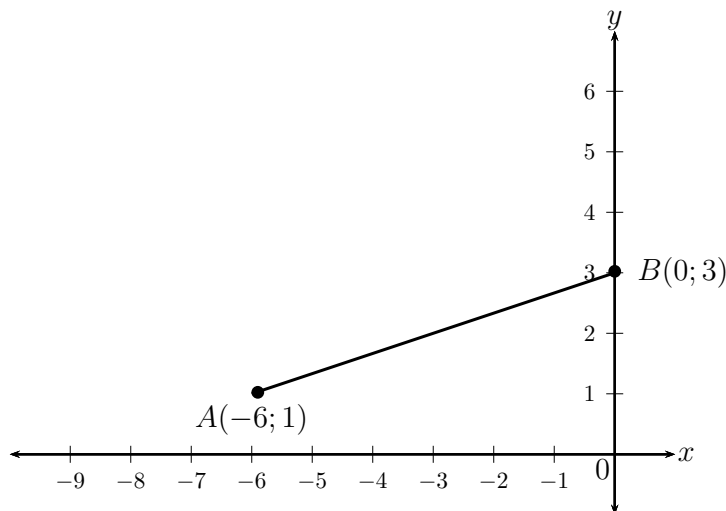
- (d) Vierhoek $WXYZ$ met $W(1; -2)$, $X(-1; -3)$, $Y(2; -4)$ en $Z(3; -2)$
2. In die gegewe diagram is die hoekpunte van 'n veelhoek $F(2; 0)$, $G(1; 5)$, $H(3; 7)$ en $I(7; 2)$.



- (a) Vind die lengtes van die sye van $FGHI$.
- (b) Is die teenoorstaande sye van $FGHI$ parallel?
- (c) Toon deur berekening of die hoeklyne van $FGHI$ mekaar halveer.
- (d) Watter tipe veelhoek is $FGHI$? Gee redes vir jou antwoord.
3. 'n Veelhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(3; 2)$, $B(4; 5)$, $C(1; 7)$ en $D(1; 3)$ word gegee.
- (a) Teken die veelhoek.
- (b) Bepaal die sylengtes van die veelhoek.
4. $ABCD$ is 'n veelhoek met hoekpunte $A(0; 3)$, $B(4; 3)$, $C(5; -1)$ en $D(-1; -1)$.
- (a) Wys dat:
- (i) $AD = BC$
 - (ii) $AB \parallel DC$
- (b) Benoem $ABCD$.
- (c) Wys dat die hoeklyne AC en BD mekaar nie halveer nie.
5. P , Q , R en S is die punte $(-2; 0)$, $(2; 3)$, $(5; 3)$ en $(-3; -3)$ onderskeidelik.
- (a) Wys dat:
- (i) $SR = 2PQ$
 - (ii) $SR \parallel PQ$
- (b) Bereken die lengte van:
- (i) PS

(ii) QR (c) Watter tipe veelhoek is $PQRS$? Gee redes vir jou antwoord.

6. $EFGH$ is 'n parallelogram met hoekpunte $E(-1; 2)$, $F(-2; -1)$ en $G(2; 0)$. Vind die koördinate van H deur gebruik te maak van die feit dat die hoeklyne van 'n parallelogram mekaar halveer.
7. $PQRS$ is 'n vierhoek met punte $P(0; -3)$; $Q(-2; 5)$; $R(3; 2)$ en $S(3; -2)$ in die Cartesiese vlak.
- (a) Vind die lengte van QR .
- (b) Bepaal die gradiënt van PS .
- (c) Vind die middelpunt van PR .
- (d) Is $PQRS$ 'n parallelogram? Verskaf redes vir jou antwoord.
8. $A(-2; 3)$ en $B(2; 6)$ is punte op die Cartesiese vlak. $C(a; b)$ is die middelpunt van AB . Vind die waardes van a en b .
9. Beskou: $\triangle ABC$ met hoekpunte $A(1; 3)$, $B(4; 1)$ en $C(6; 4)$:
- (a) Skets die driehoek ABC op die Cartesiese vlak.
- (b) Wys dat ABC is 'n gelykbenige driehoek is.
- (c) Bepaal die koördinate van M , die middelpunt van AC .
- (d) Bepaal die gradiënt van AB .
- (e) Toon aan dat die volgende punte op dieselfde reguitlyn lê: A , B en $D(7; -1)$
10. In die diagram is A die punt $(-6; 1)$ en B is die punt $(0; 3)$:



- (a) Vind die vergelyking van die lyn AB .
- (b) Bereken die lengte van AB .
11. $\triangle PQR$ het hoekpunte $P(1; 8)$, $Q(8; 7)$ en $R(7; 0)$. Wys deur berekening dat $\triangle PQR$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.

12. $\triangle ABC$ het hoekpunte $A(-3; 4)$, $B(3; -2)$ en $R(-5; -2)$. M is die middelpunt van AC en N die middelpunt van BC . Gebruik $\triangle ABC$ om die middelpuntstelling deur analitiese meetkundige metodes te bewys.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02j0 (2.) 02j1 (3.) 02j2 (4.) 02j3 (5.) 02j4 (6.) 02j5

(7.) 02j6 (8.) 02j7 (9.) 02j8 (10.) 02j9 (11.) 02ja (12.) 02jb

Wanneer ons 'n eksperiment uitvoer of 'n opname maak, kan ons potensieel met duisende of selfs miljoene waardes in die resulterende datastel sit. Te veel data kan oorweldigend wees en ons moet dit verminder of voorstel op 'n manier wat makliker is om te verstaan en te kommunikeer.

Statistiek gaan oor die opsom van data. Statistiese metodes stel ons in staat om die noodsaaklike inligting in 'n datastel voor te stel en die onbelangrike inligting ter syde te stel. Ons moet versigtig wees om seker te maak dat ons statistiese metodes korrek toepas sodat onse nie per ongeluk sekere belangrike aspekte van die datastel uitlig en die data dus makliker maak om te interpreteer nie.

Deur statistiek oneerlik of swak toe te pas, kan ons belangrike inligting buite rekening laat en toelaat dat mense foutiewe gevolgtrekkings maak.

In hierdie hoofstuk gaan ons na 'n paar numeriese en grafiese metodes kyk waardeur data voorgestel kan word om dit makliker te maak om te interpreteer.

📺 Video: VMbqd by www.everythingmaths.co.za

9.1 Versamelling van data

 EMDDD

DEFINISIE: Data

Data verwys na stukke inligting wat waargeneem en opgeteken kan word in 'n eksperiment of opname.

Ons onderskei tussen twee soorte data: kwantitatiewe en kwalitatiewe data. Data is die meervoud van 'datum' en dus is dit 'n meervoudsvorm: in Engels sê ons 'the data are' en nie 'the data is' nie.

DEFINISIE: *Kwantitatiewe data*

Kwantitatiewe data kan as getalle geskryf word.

Kwantitatiewe data kan diskreet of kontinu wees. Diskrete kwantitatiewe data kan voorgestel word deur heelgetalle en kom gewoonlik voor wanneer ons dinge tel, byvoorbeeld die aantal SMS-boodskappe gestuur op een dag.

Kontinue kwantitatiewe data kan voorgestel word deur reële getalle, byvoorbeeld die hoogte of die massa van 'n persoon, die afstand afgelê deur 'n motor of die tydsduur van 'n telefoonoproep.

DEFINISIE: *Kwalitatiewe data*

Kwalitatiewe data is data wat nie as getalle geskryf kan word nie, byvoorbeeld die insameling van die antwoorde van mense oor hoe hulle voel of wat hulle geliefkoosde kleur is.

Kategoriale data en anekdotiese data is twee algemene tipes kwalitatiewe data. Kategoriale data kan kom van 'n beperkte aantal moontlikhede, byvoorbeeld jou geliefkoosde koeldrank, die kleur van jou selfoon of jou moedertaal.

Anekdotiese data neem die vorm aan van 'n onderhoud of 'n storie, byvoorbeeld wanneer jy iemand vra wat hulle persoonlike ondervinding was toe hulle 'n sekere produk gebruik het, of wat hulle dink van iemand anders se optrede.

Kategoriale data kan soms omgeskakel word na kwantitatiewe data deur die aantal kere te tel wat elke kategorie voorkom. In 'n klas met 30 leerders, vra ons elkeen wat die kleur is van sy of haar selfoon en ons kry die volgende antwoorde:

swart	swart	swart	wit	pers	red	red	swart	swart	swart
wit	wit	swart	swart	swart	swart	pers	swart	swart	wit
pers	swart	rooi	rooi	wit	swart	oranje	oranje	swart	wit

Hierdie is 'n kategoriale kwantitatiewe dataset aangesien elkeen van die antwoorde kom uit een van 'n klein aantal moontlikhede. Ons kan dieselfde data voorstel deur te tel

hoeveel kere elke kleur voorkom.

Kleur	Telling
swart	15
wit	6
rooi	4
pers	3
oranje	2

Dit is diskrete kwantitatiewe data aangesien elke telling 'n heelgetal is.

Voorbeeld 1: Kwantitatiewe data

PROBLEEM

Thembisile stel belang daarin om lugtyd te her-verkoop aan haar klasmaats. Sy wil graag weet hoeveel besigheid sy van hulle kan verwag. Daarom vra sy elk van sy 20 klasmaats hoeveel SMS-boodskappe hulle gestuur het gedurende die vorige dag. Die resultate was:

20	3	0	14	30	9	11	13	13	15
9	13	16	12	13	7	17	14	9	13

Is hierdie datastel kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.

OPLOSSING

Die aantal SMS-boodskappe is 'n getal, wat beteken die data is kwantitatief en diskreet.

Voorbeeld 2: Kwalitatiewe of kwantitatiewe data**PROBLEEM**

Thembisile wil uitvind wat die mees gewilde selfoon verskaffer is onder leerders in haar skool. Hierdie keer kies Thembisile op willekeurige wyse 20 leerders uit die hele skool en vra aan hulle watter selfoon verskaffer hulle tans gebruik. Die 20 resultate was:

Cell C	Vodacom	Vodacom	MTN	Vodacom
MTN	MTN	Virgin Mobile	Cell C	8-ta
Vodacom	MTN	Vodacom	Vodacom	MTN
Vodacom	Vodacom	Vodacom	Virgin Mobile	MTN

Is hierdie dataset kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.

OPLOSSING

Aangesien die antwoorde nie getalle is nie maar een van 'n klein aantal moontlikhede word hierdie kategoriale kwalitatiewe data genoem.

9.2 Maatstawwe van sentrale neiging EMDDE

Gemiddelde



DEFINISIE: Gemiddelde

Die gemiddelde word gedefinieer as die som van 'n stel datawaardes, gedeel deur die aantal waardes in die som. 'n Horisontale strepie oor 'n veranderlike is die notasie wat gebruik word vir die gemiddelde van 'n stel datawaardes. Die formule vir die gemiddelde van 'n datastel $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ is

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\end{aligned}$$

Die gemiddelde word soms die rekenkundige gemiddelde genoem.

▶ Video: VMbqd by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 3: Berekening van die gemiddelde

PROBLEEM

Wat is die gemiddelde van die datastel $\{10; 20; 30; 40; 50\}$?

OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die som van die data**

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

Stap 2 : Deel die som deur die getal datapunte in die stel om die gemiddelde te kry

Aangesien daar 5 waardes in die datastel is, het ons

$$\text{Gemiddelde} = \frac{150}{5} = 30$$

Mediaan



DEFINISIE: Mediaan

Die mediaan van 'n datastel is die waarde van die sentrale of middelste datapunt wanneer die datastel georden word van die kleinste tot die grootste waarde.

Presies die helfte van die datawaardes is kleiner as die mediaan en die ander helfte is groter as die mediaan.

Om die mediaan van 'n kwantitatiewe datastel te bereken, sorteer die data van die kleinste tot die grootste waarde en vind dan die waarde in die middel (middelwaarde). As daar 'n ewe aantal datapunte is, sal die mediaan halfpad tussen twee waardes in die datastel wees.

Voorbeeld 4: Mediaan van 'n onewe aantal datawaardes**PROBLEEM**

Wat is die mediaan van {10; 14; 86; 2; 68; 99; 1}?

OPLOSSING**Stap 1 : Orden die waardes**

Die waardes in die datastel, van die kleinste tot die grootste is

1; 2; 10; 14; 68; 86; 99

Stap 2 : Vind die middelwaarde (getal in die middel)

Daar is 7 waardes in die datastel. Aangesien daar 'n onewe aantal datawaardes is, sal die mediaan gelyk wees aan die waarde in die middelste, dus die 4^{de}, posisie. Dus is 14 die mediaan van die datastel.

Voorbeeld 5: Mediaan vir 'n ewe aantal waardes**PROBLEEM**

Wat is die mediaan van {11; 10; 14; 86; 2; 68; 99; 1}?

OPLOSSING**Stap 1 : Orden die waardes**

Die waardes in die datastel, van klein na groot, is

1; 2; 10; 11; 14; 68; 86; 99

Stap 2 : Vind die middelwaarde

Daar is 8 waardes in die datastel. Omdat daar 'n ewe aantal datawaardes is, sal die mediaan halfpad tussen die twee waardes in die middel wees. Dit is naamlik die 4^{de} en 5^{de} posisies. Die waarde in die 4^{de} posisie is 11 en die waarde in die 5^{de} posisie is 14. Die mediaan lê halfpad tussen die twee en is dus

$$\text{Mediaan} = \frac{11 + 14}{2} = 12,5$$

Modus

**DEFINISIE: Modus**

Die modus van 'n datastel is die waarde wat die meeste voorkom in die stel. Die modus kan ook beskryf word as die mees algemene waarde met die hoogste voorkomingsfrekwensie in die datastel.

Om die modus te bereken, tel ons doodeenvoudig die aantal kere wat elke datawaarde in die datastel voorkom en vind so die waarde wat die meeste kere voorkom.

'n Datastel kan meer as een modus hê as daar meer as een waarde is wat die hoogste telling het. Byvoorbeeld, beide 2 en 3 is modi (modusse) in die datastel {1; 2; 2; 3; 3}. As alle punte in die datastel met dieselfde frekwensie voorkom, kan ons die datastel beskryf as een met baie modusse of een met geen modus nie.

Voorbeeld 6: Vind die modus**PROBLEEM**

Vind die modus van die datastel $\{2; 2; 3; 4; 4; 4; 6; 6; 7; 8; 8; 10; 10\}$.

OPLOSSING

Stap 1 : Tel die aantal kere wat elke waarde voorkom in die datastel

Waarde	Telling
2	2
3	1
4	3
6	2
7	1
8	2
10	2

Stap 2 : Vind die waarde wat die meeste kere voorkom

Van die af bostaande tabel kan ons sien 4 is die enigste waarde wat 3 keer voorkom en al die ander datawaardes kom minder kere voor. Dus is 4 die modus van die datastel.

Een probleem met die gebruik van die modus as 'n maatstaf van sentrale neiging, is dat ons gewoonlik nie die modus van 'n kontinue datastel kan bereken nie. Aangesien kontinue waardes op enige plek op die reële getallelyn kan lê, sal enige spesifieke waarde omtrent nooit herhaal word nie. Dit beteken dat die frekwensie van elke waarde in die datastel 1 sal wees en dat daar dus geen modus sal wees nie. Een manier om hierdie probleem aan te spreek is met groepering van data.

Voorbeeld 7: Vergelyk maatstawwe van sentrale neiging**PROBLEEM**

Om verbruikers te beskerm is daar in Suid-Afrika regulasies ten opsigte van die vervaardiging van brood. Volgens wet moet 'n brood, waarop die massa nie spesifiek aangedui is nie, 800 g weeg met 'n speling van 5 persent onder en 10 persent bokant hierdie massa. Vishnu is geïnteresseerd daarin om uit te vind hoe 'n nasionale verskaffer voldoen aan die standaard. Hy het die plaaslike tak van die verskaffer besoek en die massas van 10 verskillende brode vir 'n week lank aangeteken. Hier is die resultate, in gram:

Maandag	Dinsdag	Woensdag	Donderdag	Vrydag	Saterdag	Sondag
802,4	787,8	815,7	807,4	801,5	786,6	799,0
796,8	798,9	809,7	798,7	818,3	789,1	806,0
802,5	793,6	785,4	809,3	787,7	801,5	799,4
819,6	812,6	809,1	791,1	805,3	817,8	801,0
801,2	795,9	795,2	820,4	806,6	819,5	796,7
789,0	796,3	787,9	799,8	789,5	802,1	802,2
789,0	797,7	776,7	790,7	803,2	801,2	807,3
808,8	780,4	812,6	801,8	784,7	792,2	809,8
802,4	790,8	792,4	789,2	815,6	799,4	791,2
796,2	817,6	799,1	826,0	807,9	806,7	780,2

1. Is hierdie datastel kwalitatief of kwantitatief? Verduidelik jou antwoord.
2. Bepaal die gemiddelde, mediaan en modus van die massa van 'n brood vir elke dag van die week. Gee jou antwoorde tot een desimale plek.
3. Gebaseer op hierdie data, dink jy die verskaffer voorsien brood wat voldoen aan die Suid-Afrikaanse riglyne?

OPLOSSING

Stap 1 : Kwalitatief of kwantitatief?

Aangesien enige massa verteenwoordig word deur 'n getal, is die datastel kwantitatief. Omdat die massa enige reële getal kan wees, is die data kontinu.

Stap 2 : Bereken die gemiddelde

In elke kolom, vir elke dag van die week, tel ons die datawaardes bymekaar en verdeel die totaal deur die aantal datapunte, naamlik 10. Vir Maandag is die som van massas 8 007,9 g, dus is die gemiddelde vir Maandag:

$$\frac{8\,007,9}{10} = 800,8 \text{ g}$$

Op dieselfde manier kan ons die gemiddelde vir elke dag van die week bereken. Sien die tabel hieronder vir die resultate.

Stap 3 : Bereken die mediaan

In elke kolom sorteer ons die waardes van die laagste tot die hoogste en vind die waarde in die middel. Aangesien daar 'n ewe aantal metings, naamlik 10, is die mediaan halfpad tussen die twee getalle in die middel. Vir Maandag is die gesorteerde lys van getalle:

789,0; 789,0; 796,2; 796,7; 801,2; 802,3; 802,3; 802,5; 808,7; 819,6

Die twee waardes in die middel is 801,2 en 802,3 dus is die mediaan

$$\frac{801,2 + 802,3}{2} = 801,8 \text{ g}$$

Op dieselfde wyse kan ons die mediaan bereken vir elke dag van die week. Hier is die tabel met al die gemiddeldes en mediane.

Dag	Gemiddelde	Mediaan
Maandag	800,8 g	801,8 g
Dinsdag	797,2 g	796,1 g
Woensdag	798,4 g	797,2 g
Donderdag	803,4 g	800,8 g
Vrydag	802,0 g	804,3 g
Saterdag	801,6 g	801,4 g
Sondag	799,3 g	800,2 g

Uit bostaande berekeninge kan ons sien dat die gemiddelde en die mediaan naby aan mekaar, maar nie heeltemal dieselfde is nie. In die volgende voorbeeld sal ons sien dat die gemiddelde en die mediaan nie altyd naby aan mekaar is nie.

Stap 4 : Bepaal die modus

Aangesien die data kontinu is, kan ons nie die modus bereken nie. In die volgende afdeling sal ons sien hoe om data te groepeer om dit moontlik te maak om 'n benadering vir die modus te bereken.

Stap 5 : Gevolgtrekking: is die vervaardiger betroubaar?

In hierdie geval is die vereiste dat die massa van 'n brood tussen 800 g minus 5%, dus 760 g, en 800 g plus 10%, dus 880 g sal wees. Aangesien al Vishnu se metings binne hierdie grense val en aangesien die gemiddeldes en die mediane almal naby aan 800 g is, kan ons tot die gevolgtrekking kom dat die verskaffer betroubaar is.

DEFINISIE: Uitskieter

'n Uitskieter is 'n waarde in die datastel wat nie tipies is van die res van die stel nie. Dit is gewoonlik 'n waarde wat baie groter is of baie kleiner is as al die ander waardes in die stel.

Voorbeeld 8: Invloed van die uitskieters op die gemiddelde en die mediaan

PROBLEEM

Die lengtes van 10 leerders word in sentimeters gemeet en gee die volgende datastel:

{150; 172; 153; 156; 146; 157; 157; 143; 168; 157}

Later voeg ons nog 'n leerder, met die uitsonderlike lengte van 181 cm, by hierdie groep. Vergelyk die gemiddelde en mediaan van die lengtes van die leerders voor en na die laaste leerder bygevoeg is.

OPLOSSING

Stap 1 : Bereken die gemiddelde van die eerste 10 leerders

$$\begin{aligned}\text{Gemid.} &= \frac{150 + 172 + 153 + 156 + 146 + 157 + 157 + 143 + 168 + 157}{10} \\ &= 155,9 \text{ cm}\end{aligned}$$

Stap 2 : Bereken die gemiddelde van al 11 leerders

$$\begin{aligned}\text{Gemid.} &= \frac{150 + 172 + 153 + 156 + 146 + 157 + 157 + 143 + 168 + 157 + 181}{11} \\ &= 158,2 \text{ cm}\end{aligned}$$

Hieruit sien ons die gemiddelde lengte verander met $158,2 - 155,9 = 2,3$ cm wanneer ons die uitskieter (die lang leerder) byvoeg by die datastel.

Stap 3 : Bereken die mediaan van die eerste 10 leerders

Om die mediaan te vind, moet ons die datastel sorteer:

{143; 146; 150; 153; 156; 157; 157; 157; 168; 172}

Aangesien daar 'n ewe getal waardes is, naamlik 10, lê die mediaan

halfpad tussen die 5^{de} en 6^{de} waardes:

$$\text{Mediaan} = \frac{156 + 157}{2} = 156,5 \text{ cm}$$

Stap 4 : Bereken die mediaan van al 11 leerders

Nadat die lang leerder bygevoeg is, sien die gesorteerde datastel as volg daaruit:

{143; 146; 150; 153; 156; 157; 157; 157; 168; 172; 181}

Met 11 waardes in die datastel is die mediaan die 6^{de} waarde: 157 cm. Dus verander die mediaan net met 0,5 cm wanneer ons die uitskieter by die datastel voeg. In die algemeen, word die mediaan minder beïnvloed deur die byvoeging van uitskieters by 'n datastel, as die gemiddelde. Dit is belangrik omdat dit redelik algemeen is dat uitskieters gemeet word tydens 'n eksperiment as gevolg van probleme met toerusting of onverwagte versteurings.

Oefening 9 - 1

1. Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die volgende datastelle:
 - (a) 2; 5; 8; 8; 11; 13; 22; 23; 27
 - (b) 15; 17; 24; 24; 26; 28; 31; 43
 - (c) 4; 11; 3; 15; 11; 13; 25; 17; 2; 11
 - (d) 24; 35; 28; 41; 32; 49; 31
2. Die ouderdomme van 15 drawwers van die Comrades Marathon is aangeteken:

31; 42; 28; 38; 45; 51; 33; 29; 42; 26; 34; 56; 33; 46; 41

Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die ouderdomme.

3. In die eerste van 'n aantal flesse is daar 1 lekker. In die tweede is daar 3 lekkers. Die gemiddelde van die aantal lekkers in die eerste twee flesse is 2.

- (a) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste drie flesse 3 is, hoeveel lekkers is daar in die derde fles?
 - (b) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste vier flesse 4 is, hoeveel lekkers is daar in die vierde fles?
4. Vind 'n stel van 5 ouderdomme waarvoor die gemiddelde ouderdom 5 is, die modale ouderdom (dus die modus) 2 is en die mediaan ouderdom 3 jaar is.
5. Vier vriende het elkeen 'n aantal albasters. Hulle bereken dat 10 die gemiddelde is van die aantal albasters wat hulle het. Een van hulle vertrek. Sy het 4 albasters. Hoeveel albasters het die oorblywende vriende altesaam?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02qr (2.) 02qs (3.) 02qt (4.) 02qu (5.) 02qv

9.3 *Groepering van data*



'n Algemene manier om kwantitatiewe data te hanteer is om die volle stel waardes te onderverdeel in 'n aantal sub-groepe of klasse. Deur elke kontinue datawaarde in te deel in die klas waarin dit val, verander die data in die stel van kontinu na diskreet.

Groepering word gedoen deur 'n stel klasse te definieer en dan te tel hoeveel data in elke klas val. Die klasse moet so gekies word dat hulle nie oorvleuel nie en sodat hulle die volle wydte van die datastel dek.

Een manier om gegroepeerde data voor stel is met 'n histogram. 'n Histogram is 'n versameling van reghoeke, waar die basis van elke reghoek (op die x -as) die waardes dek in die klas wat daaraan gekoppel is en die hoogte van die reghoek ooreenstem met die aantal waardes in die klas.

 Video: VMbue by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 9: Groepe en histogramme**PROBLEEM**

Die hoogtes van 30 leerders word in sentimeters gegee, in die tabel hieronder.

142	163	169	132	139	140	152	168	139	150
161	132	162	172	146	152	150	132	157	133
141	170	156	155	169	138	142	160	164	168

Groepeer die data in die volgende klasse en trek 'n histogram van die gegroepeerde data:

$$130 \leq h < 140$$

$$140 \leq h < 150$$

$$150 \leq h < 160$$

$$160 \leq h < 170$$

$$170 \leq h < 180$$

(Let daarop dat die data nie oorvleuel waar een klas eindig en die volgende klas begin nie.)

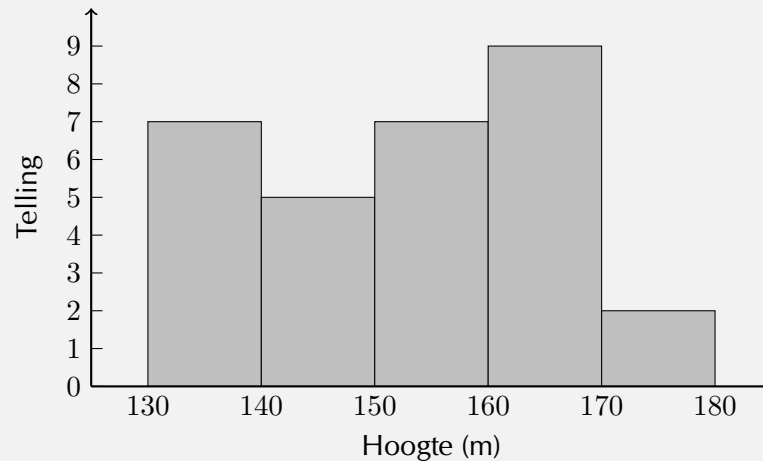
OPLOSSING

Stap 1 : Tel die aantal datawaardes in elke klas

Gebied	Telling
$130 \leq h < 140$	7
$140 \leq h < 150$	5
$150 \leq h < 160$	7
$160 \leq h < 170$	9
$170 \leq h < 180$	2

Stap 2 : Trek die histogram

Aangesien daar 5 klasse is, sal ons histogram uit 5 reghoeke bestaan. Die basis van elke reghoek word deur die klaswydte gedefinieer. Die hoogte van elke reghoek word gedefinieer deur die datatelling in die klas.



Die histogram maak dit maklik om te sien in watter klas die meeste lengtes val en gee 'n oorsig oor die verspreiding van die waardes in die datastel.

Oefening 9 - 2

1. 'n Eksperiment is onderneem in die skool en 50 leerders is gevra om te raai hoeveel lekkers daar in 'n bottel is. Die volgende raaiskote word aangeteken:

56	49	40	11	33	33	37	29	30	59
21	16	38	44	38	52	22	24	30	34
42	15	48	33	51	44	33	17	19	44
47	23	27	47	13	25	53	57	28	23
36	35	40	23	45	39	32	58	22	40

- (a) Trek 'n gegroepeerde frekwensietabel op en gebruik die volgende intervalle $10 < x \leq 20$; $20 < x \leq 30$; $30 < x \leq 40$; $40 < x \leq 50$; en $50 < x \leq 60$.
- (b) Trek 'n histogram om die frekwensietabel van die gegroepeerde data voor te stel.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02qw

Maatstawwe van sentrale neiging

 EMDDJ

Ons beramings van maatstawwe van sentrale neiging sal verander as ons data groepeer omdat ons sekere inligting verloor wanneer ons data in klasse indeel. As ons slegs die gegroepeerde data het om mee te werk, het ons nie meer die gemete waardes van die data tot dieselfde vlak van akkuraatheid as vantevore nie. Die beste wat ons kan doen is om te aanvaar dat die waardes gegroepeer is in die middel van elke klas.

As ons terugkyk na die vorige voorbeeld, sien ons ons het met 'n datastel van leerders se hoogtes begin

{132; 132; 132; 133; 138; 139; 139; 140; 141; 142; 142; 146; 150; 150; 152;
152; 155; 156; 157; 160; 161; 162; 163; 164; 168; 168; 169; 169; 170; 172}

Let daarop dat die data hier gesorteer is. Die gemiddelde van hierdie data is 151,8 en die mediaan is 152. Die modus is 132, maar onthou dat daar probleme is met die berekening van die modus van kontinue kwantitatiewe data.

Na groepering van die data, het ons nou die datastel hieronder aangetoon. Let daarop dat elke datawaarde geplaas word in die middel van die klas en dat die aantal kere wat elke datawaarde herhaal word presies ooreenstem met die telling in elke klas.

{135; 135; 135; 135; 135; 135; 135; 145; 145; 145; 145; 145; 155; 155; 155;
155; 155; 155; 155; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 165; 175; 175}

Die groepering verander die maatstawwe van sentrale neiging aangesien elke datawaarde nou hanteer word asof dit geleë is in die middel van die klas waarin dit geplaas is.

Die gemiddelde is nou 153, die mediaan is 155 en die modus is 165. Dit is eintlik 'n beter benadering van die modus aangesien die groepering getoon het in watter klas die meeste leerderlengtes val.

Oefening 9 - 3

1. Oorweeg die volgende gegroepeerde data en bereken die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep.

Massa (kg)	Telling
$40 < m \leq 45$	7
$45 < m \leq 50$	10
$50 < m \leq 55$	15
$55 < m \leq 60$	12
$60 < m \leq 65$	6

2. Vind die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep in die datastel van die tyd wat mense benodig om 'n spel te voltooi:

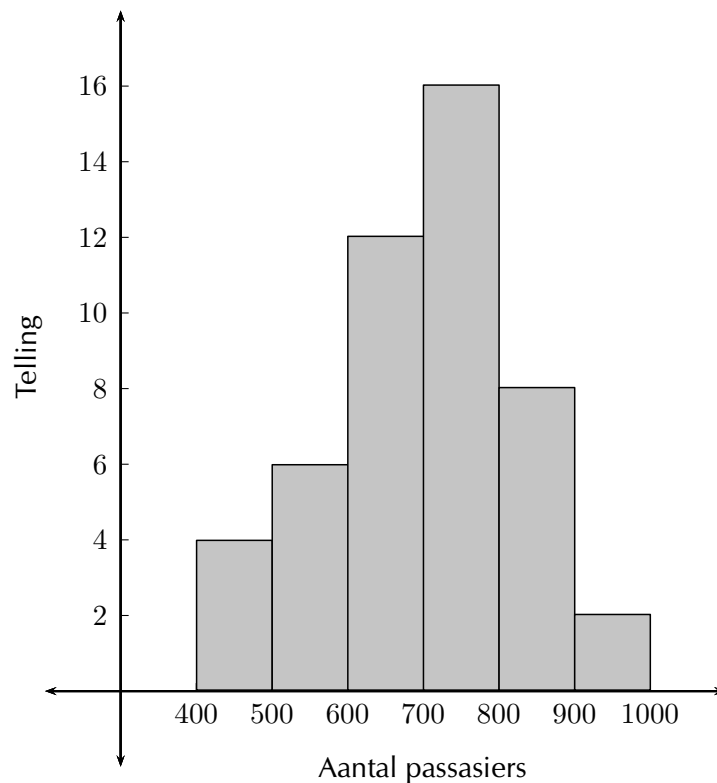
Tyd (s)	Telling
$35 < t \leq 45$	5
$45 < t \leq 55$	11
$55 < t \leq 65$	15
$65 < t \leq 75$	26
$75 < t \leq 85$	19
$85 < t \leq 95$	13
$95 < t \leq 105$	6

3. Die histogram hieronder bewys die aantal passasiers wat per week in Alfred se taxi reis.

Bereken:

- (a) die modale interval
- (b) die totale aantal passasiers wat in Alfred se taxi gereis het

- (c) 'n beraming van die gemiddelde
- (d) 'n beraming van die mediaan
- (e) indien dit geskat word dat elke passasier 'n gemiddelde afstand van 5 km gereis het, hoeveel geld sou Alfred verdien as hy R 3,50 per km gevra het?



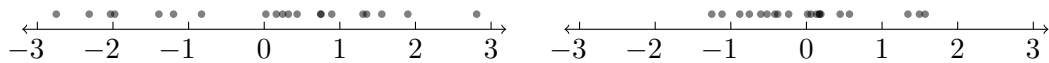
(A+) Meer oefening (▶) video oplossings (?) of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02qx (2.) 02qy (3.) 02qz

9.4 Spreiding



Die sentrale neiging is nie die enigste interessante of nutting inligting van 'n datastel nie. Die twee datastelle hieronder het dieselfde gemiddelde, maar is duidelik baie verskillend. Hulle het dieselfde gemiddelde 0, maar is op verskillende maniere rondom daardie gemiddelde versprei. Elke kolletjie verteenwoordig een datapunt.



In hierdie afdeling sal ons na die spreiding (dispersie) van 'n datastel kyk. Spreiding is 'n algemene term wat beskryf hoe die datawaardes uitgesprei is rondom die middel.

📺 Video: VMbsf by www.everythingmaths.co.za

Variasiewydte



DEFINISIE: Variasiewydte

Die variasiewydte van 'n datastel is die verskil tussen die maksimum en die minimumwaardes in die stel.

Die mees voor die handliggende maatstaf van dispersie is die variasiewydte. Die variasiewydte dui aan hoe ver die grootste en die kleinste waardes in 'n datastel van mekaar verwyder is. Die variasiewydte is baie sensitief vir uitskieters.

Voorbeeld 10: Variasiewydte

PROBLEEM

Vind die variasiewydte van die volgende datastel:

$$\{1; 4; 5; 8; 6; 7; 5; 6; 7; 4; 10; 9; 10\}$$

Wat sou gebeur as ons die eerste waarde in die datastel verwyder?

OPLOSSING

Stap 1 : **Vind die variasiewydte**

Die kleinste waarde in die datastel is 1 en die grootste waarde is 10.
Die variasiewydte is $10 - 1 = 9$.

Stap 2 : Verwyder die eerste datapunt

Ons doen dit nie gewoonlik nie, maar indien die eerste datapunt, 1, verwyder sou word uit die stel, sou die minimumwaarde verander van 1 na 4. Dit beteken dat die variasiewydte sou verander na $10 - 4 = 6$. Dit verskil heelwat van die vorige variasiewydte; daarom sê ons dat die variasiewydte baie sensitief vir uitskieters is. In die datastel hierbo, was 1 nie tipies van die hele stel datawaardes nie. Dit is 'n uitskieter en het 'n groot invloed op die variasiewydte.

Persentiele



DEFINISIE: Persentiele

Die p^{de} persentiel is die waarde, v , wat die datastel in twee verdeel op so 'n manier dat p persent van die waardes in die datastel minder is as v en $100 - p$ persent groter is as v . Persentiele kan lê in die variasiewydte $0 \leq p \leq 100$.

Om persentiele behoorlik te verstaan, moet ons tussen drie verskillende aspekte van 'n datapunt onderskei, naamlik: sy waarde, sy rangorde en sy persentiel:

- Die waarde van 'n datapunt is dit wat ons meet of bepaal en aanteken gedurende 'n eksperiment of ondersoek.
- Die rangorde van 'n datapunt is sy posisie in die gesorteerde datastel (dit wil sê eerste, tweede, derde ens.)
- Die persentiel waarby 'n bepaalde datapunt lê, sê vir ons watter persentasie van die waardes in die datastel minder is as hierdie betrokke punt.

Die tabel hieronder som die waardes, rangordes en persentiele van die datastel op:

$\{14,2; 13,9; 19,8; 10,3; 13,0; 11,1\}$

Waarde	Rangorde	Persentiele
10,3	1	0
11,1	2	20
13,0	3	40
13,9	4	60
14,2	5	80
19,8	6	100

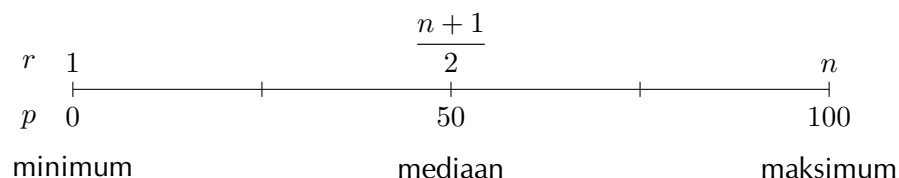
Let daarop dat die rangorde die volgorde van die datapunte beskryf, van die kleinste tot die grootste. Byvoorbeeld, 13,0 is by die 40^{ste} persentiel aangesien daar 2 waardes is wat minder is as 13,0 en 3 waardes wat groter is as 13,0.

$$\frac{2}{2+3} = 0,4 = 40\%$$

In die algemeen kan ons sê dat die formule vir die vind van die p^{de} persentiel in 'n geordende datastel met n waardes, is:

$$r = \frac{p}{100} (n - 1) + 1$$

Dit gee vir ons die rangorde, r , van die p^{de} persentiel. Om die waarde van die p^{de} persentiel te vind, tel ons vanaf die eerste waarde in die geordende datastel tot by die r^{de} waarde. Soms is die rangorde nie 'n heelgetal nie wat beteken die persentiel lê tussen twee waardes in die datastel. Die konvensie is om die waarde te neem halfpad tussen die twee waardes aangedui deur die rangorde. Die figuur hieronder toon die verwantskap tussen die rangorde en die persentiel grafies. Ons het reeds met drie persentiele te doen gekry: die mediaan (50^{ste} persentiel), die minimum (0^{de} persentiel) en die maksimum (100^{ste}).



Voorbeeld 11: Gebruik die persentielformule**PROBLEEM**

Pas die persentielformule toe en bepaal die minimum, maksimum en mediaanwaardes van die volgende datastel.

$$\{14; 17; 45; 20; 19; 36; 7; 30; 8\}$$

OPLOSSING**Stap 1 : Sorteer die waardes in die datastel**

Heel eerste moet ons die datastel sorteer van die kleinste tot die grootste:

$$\{7; 8; 14; 17; 19; 20; 30; 36; 45\}$$

Stap 2 : Vind die minimum

Die minimum is die eerste waarde in die geordende datastel. Ons gaan nou bevestig dat die persentielformule dieselfde resultaat gee. Die minimum is ekwivalent aan die 0^{de} persentiel. Volgens die formule is die rangorde, r , van die 0^{de} persentiel in 'n datastel met 9 datawaardes:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{100} (n - 1) + 1 \\ &= \frac{0}{100} (9 - 1) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dit bevestig die minimumwaarde is die eerste waarde in die datastel, naamlik 7.

Stap 3 : Vind die maksimum

Die maksimumwaarde is die laaste waarde in die geordende datastel en dit is ekwivalent aan die 100^{ste} persentiel. Met gebruik van die formule met $p = 100$ en $n = 9$, vind ons die rangorde van die

maksimumwaarde as

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{100} (n - 1) + 1 \\ &= \frac{100}{100} (9 - 1) + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Dit bevestig die maksimumwaarde is die laaste (9^{de}) waarde in die lys, naamlik 45.

Stap 4 : Vind die mediaan

Die mediaan is ekwivalent aan die 50^{ste} persentiel. Met gebruik van die formule met $p = 50$ en $n = 9$, vind ons die rangorde van die mediaanwaarde as

$$\begin{aligned} r &= \frac{50}{100} (n - 1) + 1 \\ &= \frac{50}{100} (9 - 1) + 1 \\ &= \frac{1}{2} (8) + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dit bevestig die mediaanwaarde is die middelste 50^{ste} waarde in die gesorteerde datastel, naamlik 19.

DEFINISIE: Kwartiele

Die kwartiele is die drie datawaardes wat die gesorteerde datastel in vier groepe verdeel, waar elk van die groepe 'n gelyke aantal datawaardes bevat. Die mediaan (50^{ste} persentiel) is die tweede kwartiel. Die 25^{ste} persentiel word ook die onderste (laer) kwartiel genoem (Q_1), en die 75^{ste} persentiel, die boonste (hoër) kwartiel (Q_3).

Voorbeeld 12: Kwartiele**PROBLEEM**

Bepaal die kwartiele van die volgende datastel:

$$\{7; 45; 11; 3; 9; 35; 31; 7; 16; 40; 12; 6\}$$

OPLOSSING

Stap 1 : **Sorteer die datastel**

$$\{3; 6; 7; 7; 9; 11; 12; 16; 31; 35; 40; 45\}$$

Stap 2 : **Vind die rangordes van die kwartiele**

Met gebruik van die persentiel formule, vind ons die rangordes van die 25^{ste}, 50^{ste} en 75^{ste} persentiele as:

$$\begin{aligned} r_{25} &= \frac{25}{100} (12 - 1) + 1 \\ &= 3,75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100} (12 - 1) + 1 \\ &= 6,5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100} (12 - 1) + 1 \\ &= 9,25 \end{aligned}$$

Stap 3 : **Vind die waardes van die kwartiele**

Let daarop dat elk van van hierdie rangordes 'n breuk is, wat beteken dat die waarde vir elke persentiel iewers tussen twee waardes op die datastel lê.

Vir die 25^{ste} persentiel is die rangorde 3,75, tussen die 3^{de} en 4^{de} waardes. Aangesien beide van hierdie waardes gelyk is aan 7, is die 25^{ste} persentiel 7.

Die rangorde vir die 50^{ste} persentiel (die mediaan) is 6,5, halfpad tussen die 6^{de} en 7^{de} waardes. Die 6^{de} waarde is 11 en die 7^{de} waarde

is 12, wat beteken die mediaan is $\frac{11+12}{2} = 11,5$.

Die rangorde vir die 75^{ste} persentiel is die rangorde 9,25, halfpad tussen die 9^{de} en 10^{de} waardes. Dus die 75^{ste} persentiel is $\frac{31+35}{2} = 33$.

Desiele

Die desiele is die nege datawaardes wat 'n geordende stel data in tien groepe verdeel, waar elke groep bevat 'n gelyke aantal datawaardes bevat.

Byvoorbeeld, beskou die geordende stel data:

28; 33; 35; 45; 57; 59; 61; 68; 69; 72; 75; 78; 80; 83; 86; 91;
92; 95; 101; 105; 111; 117; 118; 125; 127; 131; 137; 139; 141

Die nege desiele is: 35; 59; 69; 78; 86; 95; 111; 125; 137

Persentiele vir gegroepeerde data



In gegroepeerde data sal die persentiele iewers in 'n interval lê, eerder as by 'n spesifieke waarde. Om die interval te vind waarbinne die persentiel lê, gebruik ons weereens die persentiel formule om die rangorde van die persentiel te vind en dan kry ons die interval waarbinne die rangorde lê.

Voorbeeld 13: Persentiele in gegroepeerde data

PROBLEEM

Die wiskundepunte van 100 graad 10 leerders by 'n skool is ingesamel en die data voorgestel in die volgende tabel:

<i>Persentasiepunt</i>	<i>Aantal leerders</i>
$0 \leq x < 20$	2
$20 \leq x < 30$	5
$30 \leq x < 40$	18
$40 \leq x < 50$	22
$50 \leq x < 60$	18
$60 \leq x < 70$	13
$70 \leq x < 80$	12
$80 \leq x < 100$	10

1. Bereken die gemiddelde van hierdie gegroepeerde datastel.
2. In watter intervalle is die kwartiele van hierdie datastel?
3. In watter interval is die 30^{ste} persentiel van die datastel?

OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die gemiddelde**

Aangesien ons die gegroepeerde data het en nie die oorspronklike ongegroepeerde data nie, is die beste wat ons kan doen om die benaderde waarde van die gemiddelde te bereken asof al die leerders in elke interval in die middel van die interval lê.

$$\begin{aligned}\text{Gemid.} &= \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 25 + 18 \cdot 35 + 22 \cdot 45 + 18 \cdot 55 + 13 \cdot 65 + 12 \cdot 75 + 10 \cdot 90}{100} \\ &= 54\%\end{aligned}$$

Stap 2 : **Vind die kwartiele**

Die data is reeds gegroepeer, dus is dit ook gesorteer. Gebruik die persentielformule en die feit dat daar 100 leerders is om die rangorde

van die 25^{ste}, 50^{ste} en 75^{ste} persentiele te vind:

$$\begin{aligned} r_{25} &= \frac{25}{100} (100 - 1) + 1 \\ &= 24,75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100} (100 - 1) + 1 \\ &= 50,5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100} (100 - 1) + 1 \\ &= 75,25 \end{aligned}$$

Nou moet ons die intervale kry waarbinne hierdie rangordes val.

- Vir die onderste kwartiel vind ons daar is $2 + 5 = 7$ leerders in die onderste twee intervale gekombineerd en $2 + 5 + 18 = 25$ in die eerste drie intervale. Dit beteken die onderste kwartiel, met $7 < r_{25} < 25$, lê iewers in die derde interval: $30 \leq x < 40$.
- Vir die tweede kwartiel (die mediaan) het ons $2 + 5 + 18 + 22 = 47$ leerders in die eerste vier intervale gekombineerd en 65 leerders in die eerste 5 intervale. Dit beteken die mediaan, met $47 < r_{50} < 65$, lê iewers in die vyfde interval: $50 \leq x < 60$.
- Vir die boonste kwartiel, het ons 65 leerders in die eerste vyf intervale gekombineerd en $65 + 13 = 78$ leerders in die eerste ses intervale. Dit beteken die boonste kwartiel, met rangorde, $65 < r_{75} < 78$, lê iewers in die sesde interval: $60 \leq x < 70$.

Stap 3 : Vind die 30^{ste} persentiel

Gebruik dieselfde metode as vir die kwartiele om die rangorde van die 30^{ste} persentiel te vind.

$$\begin{aligned} r &= \frac{30}{100} (100 - 1) + 1 \\ &= 30,7 \end{aligned}$$

Nou vind ons die interval waarbinne die rangorde lê. Aangesien daar 25 leerders is in die eerste 3 intervale altesaam en 47 in die eerste vier intervale, lê die 30^{ste} persentiel in die vierde interval $40 \leq x < 50$.

Variasiewydtes



Ons definieer die variasiewydtes in terme van die persentiele. Ons het reeds die variasiewydte van die hele datastel gedefinieer as die verskil tussen die 100^{ste} persentiel en die 0^{de} persentiel (dit wil sê tussen die maksimum- en die minimumwaardes in die datastel).

DEFINISIE: Interkwartielwydte

Die interkwartielwydte is 'n maatstaf van spreiding wat bereken word deur die onderste (eerste) kwartiel (Q_1) van die boonste (hoër) kwartiel (Q_3) af te trek. Dit gee die wydte van die middelste helfte van die datastel.

DEFINISIE: Semi-interkwartielwydte

Die semi-interkwartielwydte is die helfte van die interkwartielwydte.

Oefening 9 - 4

1. Vind die variasiewydte van die datastel:

$\{1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 10; 10\}$

2. Wat is die kwartiele van hierdie datastel?

$\{3; 5; 1; 8; 9; 12; 25; 28; 24; 30; 41; 50\}$

3. 'n Klas van 12 studente skryf 'n toets en die resultaat is as volg:

20; 39; 40; 43; 43; 46; 53; 58; 63; 70; 75; 91

Vind die variasiewydte, kwartiele en die interkwartielwydte.

4. Drie stelle data word gegee:

- **Datastel 1:** {9; 12; 12; 14; 16; 22; 24}
- **Datastel 2:** {7; 7; 8; 11; 13; 15; 16; 16}
- **Datastel 3:** {11; 15; 16; 17; 19; 19; 22; 24; 27}

Vir elke datastel vind:

- (a) die variasiewydte
- (b) die onderste kwartiel
- (c) die interkwartielwydte
- (d) die semi-interkwartielwydte
- (e) die mediaan
- (f) die boonste kwartiel

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02r0 (2.) 02r1 (3.) 02r2 (4.) 02r3

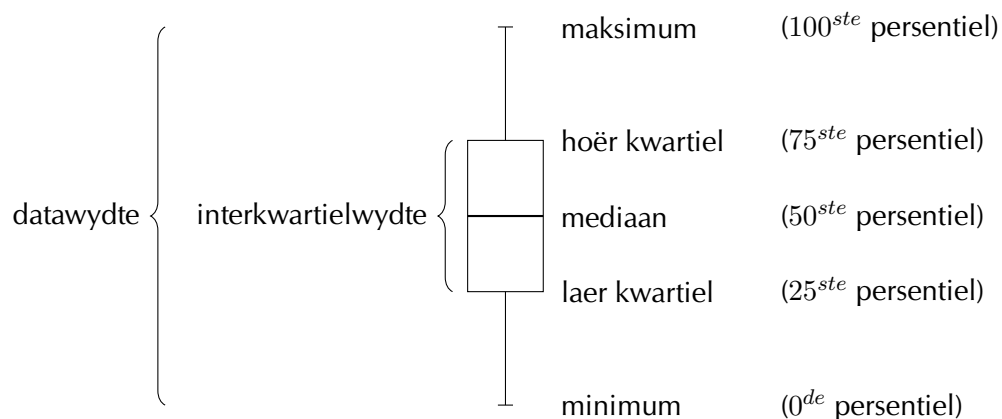
9.5 Vyf-getal opsomming



'n Algemene manier om 'n totale datastel op te som is met die vyf-getal opsomming en die 'mond-en-snor' grafiek (in Engels 'box-and-whisker plot'). Hierdie twee voorstellings verteenwoordig presies dieselfde inligting, numeries in die geval van die vyf-getal opsomming en grafies in die geval van die mond-en-snor grafiek.

Die vyf-getal opsomming bestaan uit die minimumwaarde, die maksimumwaarde en die drie kwartiele. Ons kan ook sê dit bestaan uit die 0^{de} , 25^{ste} , 50^{ste} , 75^{ste} , 100^{ste} persentiele. Die mond-en-snor grafiek toon die vyf persentiele soos in die figuur hieronder. Die mond-reghoek wys die interkwartiel wydte (die afstand tussen die Q_1 en Q_3). 'n Lyn binne-in hierdie reghoek toon die mediaan (die tweede kwartiel). Die lyne wat uitsteek aan die kante van die mond-reghoek (dit is die snor-gedeeltes) wys waar die maksimum- en minimumwaardes lê.

 Video: VMbur by www.everythingmaths.co.za


Voorbeeld 14: Vyf-getal opsomming

PROBLEEM

Trek 'n mond-en-snor grafiek van die volgende datastel:

{1,25; 1,5; 2,5; 2,5; 3,1; 3,2; 4,1; 4,25; 4,75; 4,8; 4,95; 5,1}

OPLOSSING
Stap 1 : Bepaal die minimum en die maksimum

Aangesien die datastel reeds gesorteer is, kan ons die minimum aflees as die eerste waarde (1,25) en die maksimum as die laaste waarde (5,1).

Stap 2 : Bepaal die kwartiele

Daar is 12 waardes in die datastel. Met die persentiel formule, kan ons bepaal die mediaan lê tussen die 6^{de} en die 7^{de} waardes, dus

$$\frac{3,2 + 4,1}{2} = 3,65$$

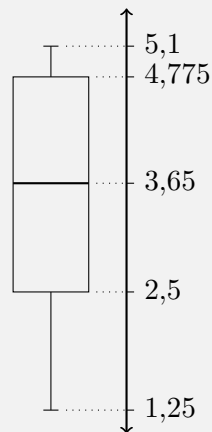
Die eerste kwartiel lê tussen die 3^{de} en 4^{de} waardes en dit gee

$$\frac{2,5 + 2,5}{2} = 2,5$$

Die derde kwartiel lê tussen die 9^{de} and 10^{de} waardes en dit gee

$$\frac{4,75 + 4,8}{2} = 4,775$$

Dit gee die data vir die vyf-getal opsomming en die datastel stel ons in staat om die mond-en-snor grafiek te trek.



Oefening 9 - 5

1. Lisa werk in 'n rekenaarwinkel. Sy verkoop die volgende aantal rekenars in 'n maand:

{27; 39; 3; 15; 43; 27; 19; 54; 65; 23; 45; 16}

Gee die vyf-getal opsomming en die mond-en-snor grafiek van Lisa se verkope.

2. Zithulele werk in telefoonverkope. Hy hou boek van die aantal verkope wat hy elke maand doen en die data word hier gegee:.

{49; 12; 22; 35; 2; 45; 60; 48; 19; 1; 43; 12}

Gee die vyf-getal opsomming en die mond-en-snor grafiek van Zithulele se verkope.

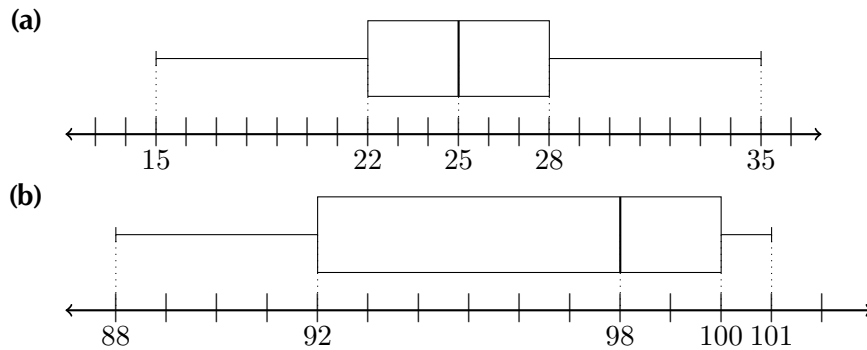
3. Hannah het vir nege maande gewerk as 'n bloemiste. Sy verkoop die

volgende aantal bruidsruiers:

$$\{16; 14; 8; 12; 6; 5; 3; 5; 7\}$$

Gee die vyf-getal opsomming van Hannah se verkope.

4. Gebruik die diagram hieronder om die vyf-getal opsomming te bereken:



A⁺ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02r4 (2.) 02r5 (3.) 02r6 (4.) 02r7

Hoofstuk 9 | Opsomming

▶ Opsommingsaanbieding: VMdvy by www.everythingmaths.co.za

- Data verwys na stukke inligting wat waargeneem en opgeteken is in 'n eksperiment of opname.
- Kwantitatiewe data kan as getalle geskryf word. Kwantitatiewe data kan diskreet of kontinu wees.
- Kwalitatiewe data is data wat nie as getalle geskryf kan word nie. Kategoriale data en anekdotiese data is twee algemene tipes kwalitatiewe data.
- Die gemiddelde word gedefinieer as die som van 'n stel datawaardes, gedeel deur

die aantal waardes in die som.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\end{aligned}$$

- Die mediaan van 'n datastel is die waarde van die sentrale of middelste datapunt wanneer die datastel georden word van die kleinste tot die grootste waarde. As daar 'n ewe aantal datapunte is sal die mediaan halfpad tussen twee waardes in die datastel wees.
- Die modus van 'n datastel is die waarde wat die meeste voorkom in die stel.
- 'n Uitskieter is 'n waarde in die datastel wat nie tipies is van die res van die stel nie. Dit is gewoonlik 'n waarde wat baie groter of baie kleiner is as al die ander waardes in die stel.
- Spreiding is 'n algemene term wat beskryf hoe die datawaardes uitgesprei is rondom die middel.
- Die variasiewydte van 'n datastel is die verskil tussen die maksimum- en minimumwaardes in die stel.
- Die p^{de} persentiel is die waarde, v , wat die datastel in twee verdeel op so 'n manier dat p persent van die waardes in die datastel minder is as v en $100 - p$ persent groter is as v . Die formule vir die vind van die p^{de} persentiel in 'n geordende datastel met n waardes is:

$$r = \frac{p}{100} (n - 1) + 1$$

- Die kwartiele is die drie datawaardes wat die gesorteerde datastel in vier groepe verdeel, waar elk van die groepe 'n gelyke aantal datawaardes bevat. Die onderste kwartiel is ($Q1$), die mediaan ($Q2$) en die boonste kwartiel ($Q3$).
- Die interkwartielwydte is 'n maatstaf van spreiding wat bereken word deur die onderste kwartiel ($Q1$) van die boonste kwartiel ($Q3$) af te trek. Dit gee die wydte van die middelste helfte van die datastel.
- Die semi-interkwartielwydte is die helfte van die interkwartielwydte.
- Die vyf-getal opsomming bestaan uit die minimumwaarde, die maksimumwaarde en die drie kwartiele ($Q1$, $Q2$ en $Q3$).
- Die mond-en-snor grafiek toon vyf persentiele.

Hoofstuk 9

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Die hoogste 7 bome in die park het hoogtes (in meters):

41; 60; 47; 42; 44; 42; 47

Vind die mediaan van hulle hoogtes.

2. Die studente in Ndeme se klas het die volgende ouderdomme:

5; 6; 7; 5; 4; 6; 6; 6; 7; 4

Vind die modale ouderdom.

3. 'n Ingenieursfirma het twee tipes enjins vir motorfietse ontwerp. Die twee motorfietse word getoets vir die tyd (in sekondes) wat dit hulle neem om te versnel van 0 km/h tot 60 km/h.

	Toets 1	Toets 2	Toets 3	Toets 4	Toets 5	Toets 6	Toets 7	Toets 8	Toets 9	Toets 10
Fiets 1	1,55	1,00	0,92	0,80	1,49	0,71	1,06	0,68	0,87	1,09
Fiets 2	0,9	1,0	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9	1,1

- (a) Watter maatstaf van sentrale neiging behoort gebruik te word vir hierdie data?
- (b) Bereken die maatstaf van sentrale neiging wat jy gekies het in (a), vir elke motorfiets.
- (c) Watter motorfiets sou jy kies, gebaseer op hierdie inligting? Neem kennis van die akkuraatheid van die getalle in elke stel toetse.
4. In 'n verkeersopname, word 'n willekeurige steekproef van 50 motoriste gevra oor die afstand wat hulle elke dag werk toe ry. Die informasie word getoon in die tabel hieronder:

Afstand (km)	Telling
$0 < d \leq 5$	4
$5 < d \leq 10$	5
$10 < d \leq 15$	9
$15 < d \leq 20$	10
$20 < d \leq 25$	7
$25 < d \leq 30$	8
$30 < d \leq 35$	3
$35 < d \leq 40$	2
$40 < d \leq 45$	2

- (a) Vind die benaderde gemiddelde van die data.
- (b) Watter persentasie van die steekproef ry
- minder as 15 km?
 - meer as 30 km?
 - tussen 16 km en 30 km daaglik?
- (c) Teken 'n histogram om die data voor te stel.
5. 'n Maatskappy wil die opleidingsprogram in sy fabriek evalueer. Hulle gee dieselfde taakopdrag aan opgeleide en onopgeleide werknemers en meet die tyd in sekondes wat dit die werkers neem om die taak te voltooi.

Opgeleide	121	137	131	135	130
	128	130	126	132	127
	129	120	118	125	134
Onopgeleide	135	142	126	148	145
	156	152	153	149	145
	144	134	139	140	142

- (a) Vind die mediane en kwartiele vir beide stelle data.
- (b) Vind die interkwartielwydtes vir beide stelle data.
- (c) Lewer kommentaar op die resultate.

- (d) Vir elke datastel teken 'n mond-en-snor diagram wat die vyf-getal-opsomming illustreer.
6. 'n Klein firma het 9 mense in diens. Die jaarlikse salarisse van die werknemers is:

R 600 000	R 250 000	R 200 000
R 120 000	R 100 000	R 100 000
R 100 000	R 90 000	R 80 000

- (a) Vind die gemiddelde van hierdie salarisse
- (b) Vind die modus
- (c) Vind die mediaan
- (d) Watter een van die drie getalle sou jy gebruik om te onderhandel oor salarisverhogings as jy 'n vakbondbeampte is? Waarom?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02r8 (2.) 02r9 (3.) 02ra (4.) 02rb (5.) 02rc (6.) 02rd

Ons gebruik waarskynlikheid om gebeurtenisse met onsekerheid te beskryf. Wanneer mens 'n sny brood laat val, dan weet jy nie of dit met die botterkant bo of onder gaan land nie. Wanneer jou voorkeur-sportspan speel, weet jy nie of hulle gaan wen of verloor nie. Wanneer die weerman aandui dat daar 'n 40% kans is vir reën more is, dan mag jy nat word of nie. Onsekerheid kom tot 'n mate voor in byna elke gebeurtenis om ons en in elke besluit wat ons maak.

Ons sal in hierdie hoofstuk sien dat al hierdie onsekerhede beskryf kan word deur die gebruik van die reëls van waarskynlikheid en dat ons definitiewe besluite kan neem oor onsekere prosesse.

Ons gaan drie voorbeelde gebruik om jou te help om die verskillende terme in waarskynlikheidsteorie te verstaan: 'n muntstuk opskiet, dobbelstene rol en 'n sokkerwedstryd.

▶ Video: VMbxk by www.everythingmaths.co.za

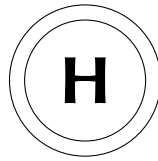
DEFINISIE: Eksperiment

'n Eksperiment verwys na 'n proses met onsekerheid.

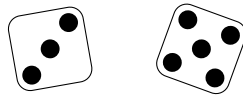
DEFINISIE: Uitslag

Die uitslag van 'n eksperiment is 'n enkele resultaat van daardie eksperiment.

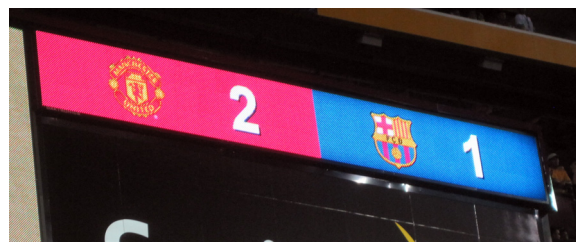
Eksperiment 1 'n Muntstuk word opgeskiet en dit land met of kruis (K) of munt (M) bo (in Engels: Tails [T] of Heads [H]). 'n Voorbeeld van die uitslag van 'n muntstuk opskiet is dit land met munt (Heads [H]) bo:



Eksperiment 2 Twee dobbelstene word gerol en die aantal kolletjies bymekaargetel. 'n Voorbeeld van die uitslag van twee dobbelstene wat gerol word:



Eksperiment 3 Twee sokkerspanne speel 'n wedstryd en ons stel belang in die eindtelling. 'n Voorbeeld van die uitslag van 'n sokkerwedstryd:



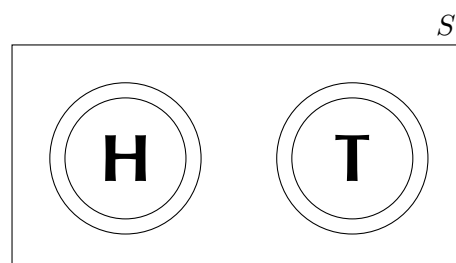
(prentjie deur apasciuto on Flickr.com)

DEFINISIE: Steekproefruimte

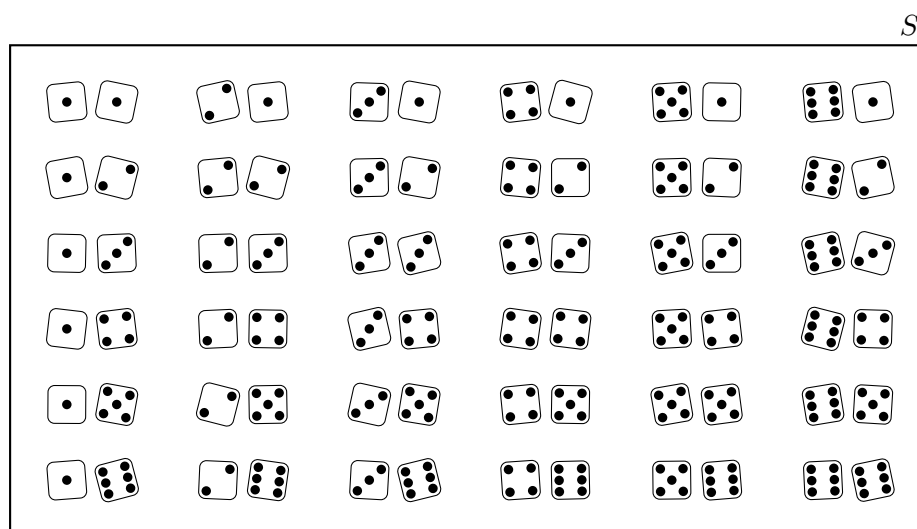
Die steekproefruimte van 'n versameling is die versameling van al die moontlike uitslae van daardie eksperiment. Die steekproefruimte word aangedui deur die simbool S en die grootte van die steekproefruimte (die som van al die moontlike uitkomstes) word aangedui deur $n(S)$.

Selfs al stel ons gewoonlik net belang in die enkele uitkomst van 'n eksperiment, het ons ook nodig om te weet wat die ander uitkomst sou kon wees. Kom ons kyk na die steekproefruimtes van ons drie eksperimente.

Eksperiment 1 Aangesien 'n muntstuk net op twee maniere kan land (ons ignoreer die waarskynlikheid dat die muntstuk op sy kant kan land), is die steekproefruimte die versameling $S = \{H; T\}$. Die grootte van die steekproefruimte is $n(S) = 2$.



Eksperiment 2 Elkeen van die dobbelstene kan land op 'n nommer van 1 tot 6. In hierdie eksperiment is die steekproefruimte van al die moontlike uitkomstelike moontlike kombinasie van die 6 nommers op die eerste dobbelsteen met die 6 nommers op die tweede dobbelsteen. Dit gee 'n totaal van $n(S) = 6 \times 6 = 36$ uitkomstelike. Die figuur hieronder wys al die uitkomstelike in die steekproefruimte:



Eksperiment 3 Elke sokkerspan kan 'n heelgetal telling kry vanaf 0 opwaarts. Ons verwag gewoonlik nie 'n hoër telling as 5 doele nie, maar daar is geen rede hoekom dit nie kan gebeur nie. Die steekproefruimte van hierdie eksperiment bestaan dus uit al die moontlike kombinasies van twee nie-negatiewe heelgetalle. Die figuur hieronder wys al die moontlikhede. Ons begrens nie die tellings van enige span nie, dus is hierdie monsterruimte oneindig groot:

	S			
	0 – 0	1 – 0	2 – 0	3 – 0 ...
	0 – 1	1 – 1	2 – 1	3 – 1 ...
	0 – 2	1 – 2	2 – 2	3 – 2 ...
	0 – 3	1 – 3	2 – 3	3 – 3
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

DEFINISIE: Gebeurtenis

'n Gebeurtenis is 'n spesifieke versameling van uitkomst van 'n eksperiment waarin jy belangstel. 'n Gebeurtenis word aangedui deur die letter E en die aantal uitkomst van die gebeurtenis met $n(E)$.

Eksperiment 1 Gestel ons wil hê die munstuk moet land met kruis bo. Hier het die gebeurtenis net een uitkomst, naamlik $E = \{H\}$, $n(E) = 1$.

Eksperiment 2 Gestel ons stel belang in die geval dat die som van die twee dobbelstene 8 is. In hierdie geval is die versameling van die gebeurtenis $E = \{(1, 7); (7, 1); (2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3)\}$ want dit bevat al die moontlike maniere om 8 kolletjies te kry met 2 dobbelstene. Die grootte van die gebeurtenis se versameling is $n(E) = 5$.

Eksperiment 3 Ons stel belang om te weet of die eerste span gaan wen. Daarvoor moet die eerste telling hoër wees as die tweede telling.

$$E = \{(1; 0); (2; 0); (2; 1); (3; 0); (3; 1); (3; 2); \dots\}$$

Hierdie gebeurtenis-versameling is oneindig groot.

10.1 Teoretiese waarskynlikheid



DEFINISIE: Waarskynlikheid

'n Waarskynlikheid is 'n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe waarskynlik dit is dat die gebeurtenis sal plaasvind.

Dit kan ook uitgedruk word as 'n persentasie ('n waarskynlikheid van 0,75 is gelyk aan 75%) of as 'n breuk (0,75 is gelyk aan $\frac{3}{4}$).

- 'n Waarskynlikheid van 0 beteken dat die gebeurtenis nooit sal plaasvind nie.
- 'n Waarskynlikheid van 1 beteken dat die gebeurtenis altyd sal plaasvind.
- 'n Waarskynlikheid van 0,5 beteken dat die gebeurtenis die helfte van die tyd sal plaasvind, of 1 keer uit elke 2.

Wanneer al die moontlike uitkomst van 'n eksperiment ewekansig is kan ons die presiese teoretiese waarskynlikheid van die gebeurtenis bereken. Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is die verhouding tussen die aantal gebeurtenisse van die eksperiment en die grootte van die steekproefruimte.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

▶ Video: VMbzip by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 1: Teoretiese waarskynlikhede

PROBLEEM

Wat is die teoretiese waarskynlikheid van elk van die gebeurtenisse in die eerste twee van ons drie eksperimente?

OPLOSSING

Stap 1 : Skryf die grootte van die steekproefruimte neer

Eksperiment 1: $n(S) = 2$

Eksperiment 2: $n(S) = 36$

Stap 2 : Skryf die grootte van die gebeurtenis-versameling neer

Eksperiment 1: $n(E) = 1$

Eksperiment 2: $n(E) = 5$

Stap 3 : Bereken die teoretiese waarskynlikheid

Eksperiment 1: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0,5$

Eksperiment 2: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36} = 0,13\bar{8}$

Let daarop dat ons nie die teoretiese waarskynlikheid van die derde eksperiment in ag neem nie. Die derde eksperiment verskil van die eerste twee op 'n belangrike wyse, naamlik dat al die moontlike uitkomste (eindtellings) nie ewekansig is nie. Ons weet, byvoorbeeld, dat 'n sokkertelling van 1–1 vry algemeen voorkom, terwyl 'n telling van 11–15 uiters selde voorkom. Omdat al die uitkomste nie ewekansig is nie, kan ons nie die verhouding tussen $n(E)$ en $n(S)$ gebruik om die teoretiese waarskynlikheid van 'n span om te wen te bereken nie.

Oefening 10 - 1

1. 'n Sak bevat 6 rooi balle, 3 blou, 2 groen en 1 wit bal. 'n Bal word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid van die volgende:
 - (a) rooi
 - (b) blou of wit
 - (c) nie groen

- (d) nie groen of rooi
2. 'n Speelkaart word willekeurig gekies uit 'n pak van 52 kaarte. Wat is die waarskynlikheid van die volgende:
- (a) die 2 van harte
 - (b) 'n rooi kaart
 - (c) 'n prentkaart
 - (d) 'n 'A'-getal
 - (e) 'n getal kleiner as 4
3. Ewe getalle in die interval 2 tot 100 word op kaarte geskryf. Wat is die waarskynlikheid om 'n veelvoud van 5 op 'n willekeurig wyse te kies?

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.) 02q1 (2.) 02q2 (3.) 02q3

10.2 Relatiewe frekwensie



DEFINISIE: Relatiewe frekwensie

Die relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis word gedefinieer as die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom in 'n aantal eksperimente, gedeel deur die aantal eksperimente.

Die relatiewe frekwensie is 'n eksperimentele syfer, nie 'n teoretiese syfer nie. 'n Eksperiment moet 'n aantal kere herhaal word en die voorkoms van die gebeurtenis in die gebeurtenis-versameling getel word. Omdat dit eksperimenteel is, is dit moontlik om telkens verskillende relatiewe frekwensies te kry met herhaling van die eksperiment.

 Video: VMbzy by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 2: Relatiewe frekwensie en teoretiese waarskynlikheid**PROBLEEM**

Ons skiet 'n muntstuk 30 keer op en beskou die uitkomst. Die resultate is in die tabelle hieronder.

toets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
uitkoms	H	T	T	T	H	T	H	H	H	T
toets	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
uitkoms	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T
toets	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
uitkoms	H	H	H	T	H	T	H	T	T	T

Wat is die relatiewe frekwensie om munt te kry na elke toets en hoe vergelyk dit met die teoretiese waarskynlikheid om munt te kry?

OPLOSSING**Stap 1 : Tel die aantal moontlike uitkomst**

'n Positiewe uitkoms is wanneer die uitkoms in ons versameling van gebeurtenisse is. Die tabel hieronder toon 'n lopende telling (na elke opskiet t) van die aantal positiewe uitkomst p wat ons verkry het. Byvoorbeeld, na $t = 20$ kere het ons 8 keer munt en 12 keer kruis, dus is die positiewe uitkomst $p = 8$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	9	10	11	11	12	12	13	13	13	13

Stap 2 : Bereken die relatiewe frekwensie

Die relatiewe frekwensie is gedefinieer as die verhouding tussen die aantal positiewe uitkomst en die totale aantal uitkomst:

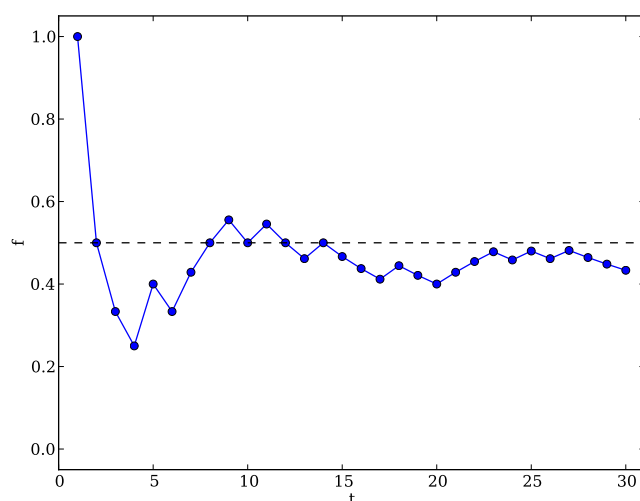
$$f = \frac{p}{t}$$

Die relatiewe frekwensie om munt te kry, f , na t muntstukskiete is:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1,00	0,50	0,33	0,25	0,40	0,33	0,43	0,50	0,56	0,50
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f	0,55	0,50	0,46	0,50	0,47	0,44	0,41	0,44	0,42	0,40
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f	0,43	0,45	0,48	0,46	0,48	0,46	0,48	0,46	0,45	0,43

Uit die laaste inskrywing in die tabel kan ons nou maklik die relatiewe frekwensie na 30 toetse aflees, naamlik $13/30 = 0,4\bar{3}$. Die relatiewe frekwensie is naby aan die teoretiese waarskynlikheid van 0,5. Oor die algemeen kom die relatiewe frekwensie nader aan die teoretiese frekwensie hoe meer toetse ons doen.

'n Beter manier om die tabel van relatiewe frekwensie op te som is deur middel van 'n grafiek:



Die grafiek hierbo is die stippling van die relatiewe frekwensie om munte, f te kry, na H muntstukskiete. Dit was van die tabel hierbo bereken, deur die aantal toetse wat reeds voltooi is, T , op die x -as te stip en die relatiewe frekwensie, f , op die y -as te stip.

Aan die begin (na 'n klein aantal toetse) fluktueer die relatiewe frekwensie heelwat rondom die teoretiese waarskynlikheid van 0,5, aangetoon deur die gebroke lyn. Soos die aantal toetse toeneem, fluktueer die relatiewe frekwensie al hoe minder en kom dit al nader aan die teoretiese frekwensie.

Voorbeeld 3: Relatiewe frekwensie en teoretiese waarskynlikheid

PROBLEEM

Terwyl ons na 10 sokker wedstryde kyk waar Span 1 teen Span 2 speel, teken ons die eindtellings aan:

Toets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Span 1	2	0	1	1	1	1	1	0	5	3
Span 2	0	2	2	2	2	1	1	0	0	0

Wat is die relatiewe frekwensie van Span 1 se wenne?

OPLOSSING

In hierdie eksperiment is elke poging in die vorm van 'n wedstryd tussen Span 1 en Span 2.

Stap 1 : Tel die aantal positiewe uitkomstes

Ons stel belang in die gebeurtenis waar Span 1 wen. Uit die tabel sien ons dit gebeur 3 keer.

Stap 2 : Bereken die relatiewe frekwensie

Daar is 10 toetse in totaal. Dit beteken die relatiewe frekwensie van

die gebeurtenis is

$$\frac{3}{10} = 0,3$$

Dit is belangrik om die verskil te verstaan tussen die teoretiese waarskynlikheid van 'n gebeurtenis en die gemete relatiewe frekwensie van die gebeurtenis in eksperimentele toetse. Die teoretiese waarskynlikheid is 'n getal wat ons kan bereken indien genoeg inligting oor die eksperiment beskikbaar is. Indien elke moontlike uitkomst in die steekproefruimte ewekansig is, kan ons die aantal uitkomst in die gebeurtenis-versameling en die aantal uitkomst in die steekproefruimte tel en daaruit die teoretiese waarskynlikheid bereken.

Die relatiewe frekwensie hang af van die volgorde van observasies gedurende 'n statistiese eksperiment. Die relatiewe frekwensie kan verskil telkens as die eksperiment herhaal word. Hoe meer toetse gedoen word gedurende 'n eksperiment, hoe nader kom die gemete relatiewe frekwensie aan die teoretiese frekwensie van die gebeurtenis.

So, waarom het ons statistiese eksperimente nodig as daar reeds teoretiese waarskynlikhede bestaan? In sekere gevalle, soos ons sokker-eksperiment, is dit moeilik of onmoontlik om die teoretiese waarskynlikheid van 'n gebeurtenis te bereken. Aangesien ons nie met sekerheid weet of een span teen 'n ander gaan punte aanteken nie, is dit nie moontlik om die teoretiese waarskynlikheid van gebeurtenisse in sokker te bereken nie. In hierdie gevalle kan ons steeds die relatiewe frekwensie gebruik om die teoretiese waarskynlikheid te skat deur eksperimente te doen en die positiewe uitkomst te tel.

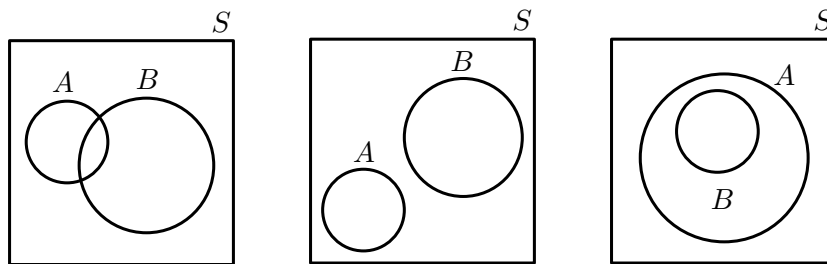
10.3 Venn-diagramme



'n Venn-diagram is 'n grafiese manier om verwantskappe tussen versamelings aan te dui. In elke Venn-diagram word 'n versameling aangedui deur 'n geslote kromme. Die area binne die kromme verteenwoordig die elemente van daardie versameling, terwyl die area buite die kromme die elemente bevat wat buite die versameling is.

Venn-diagramme is handig om na te dink oor waarskynlikheid, aangesien ons met verskillende versamelings te doen het. Beskou twee gebeurtenisse, A and B , in 'n steekproefruimte S . Die figuur hieronder toon met behulp van Venn-diagramme die moontlike

maniere waarop die gebeurtenis-versamelings kan oorvleuel:



Die versamelings word aangedui deur 'n reghoek vir die steekproefruimte S en sirkels vir A en B . In die eerste diagram oorvleuel die gebeurtenisse gedeeltelik. In die tweede diagram is daar geen oorvleueling nie. In die derde diagram bevat die een gebeurtenis die ander ten volle. Let op dat al die gebeurtenisse altyd binne die steekproefruimte val, omdat die steekproefruimte altyd al die moontlike uitkomst van die eksperiment bevat.

📺 Video: VMcbf by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 4: Venn-diagramme

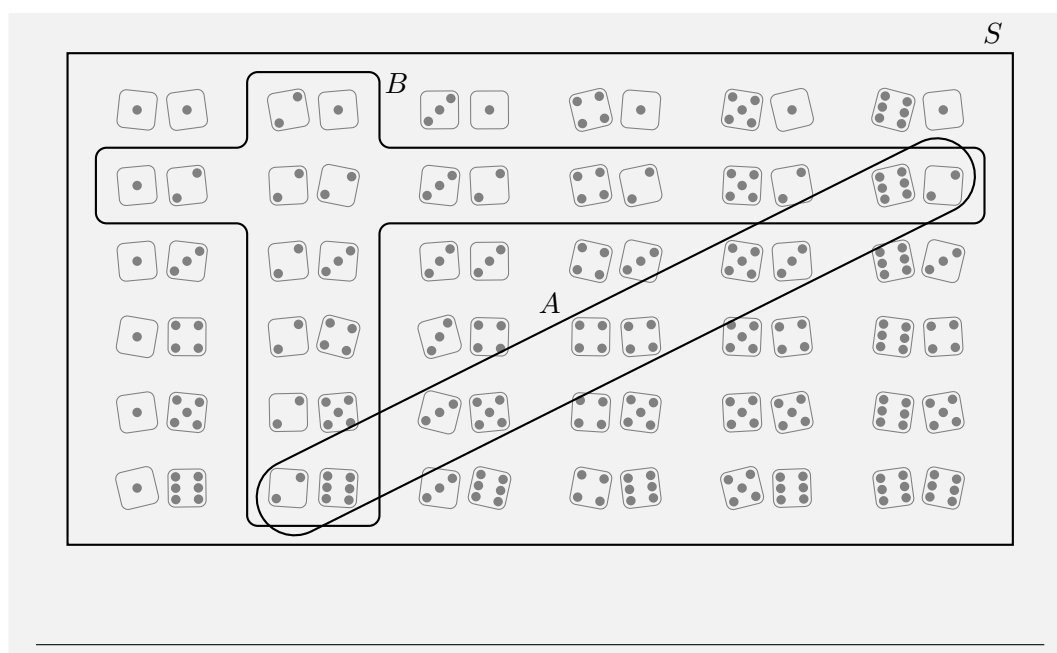
PROBLEEM

Dui met behulp van 'n Venn-diagram die steekproefruimte aan en die twee gebeurtenisse, A en B , as twee dobbelstene gerol word:

Gebeurtenis A : die som van die dobbelstene is gelyk aan 8

Gebeurtenis B : ten minste een van die dobbelstene wys 6

OPLOSSING



Voorbeeld 5: Venn-diagramme

PROBLEEM

Bepaal die stel van diamantkaarte wat uit 'n pak kaarte gehaal is. 'n Willekeurige kaart is uit die stel van diamante gekies.

- Skryf die steekproefruimte, S , vir die eksperiment neer.
- Wat is die waarde van $n(S)$?
- Bepaal die volgende twee gebeurtenisse:
 - P : 'n Ewe diamant kaart is gekies
 - R : 'n Prentkaart van diamante is gekies

Stel steekproefruimte S en gebeurtenisse P en R voor met 'n Venn-diagram.

OPLOSSING

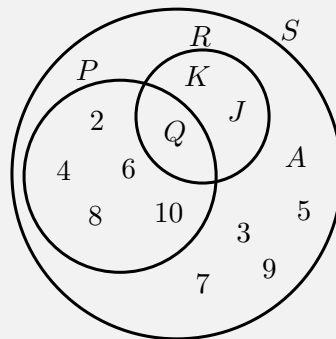
Stap 1 : **Skryf die steekproefruimte S neer**

$$S = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K\}$$

Stap 2 : **Skryf neer die waarde van $n(S)$**

$$n(S) = 13$$

Stap 3 : **Teken die Venn-diagram**



Oefening 10 - 2

- Laat S die versameling heelgetalle van 1 tot 16 aandui, X die versameling ewe getalle van 1 tot 16 en Y die versameling priemgetalle van 1 tot 16. Teken 'n Venn-diagram wat S , X and Y akkuraat aandui.
- Daar is 79 Graad 10 leerders in die skool. Almal neem Wiskunde, Aardrykskunde of Geskiedenis. 41 neem Aardrykskunde, 36 neem Geskiedenis en 30 neem Wiskunde. 16 neem Wiskunde en Geskiedenis, 6 neem Aardrykskunde en Geskiedenis, 8 neem net Wiskunde en daar is 16 wat slegs Geskiedenis neem.
 - Teken 'n Venn-dagram om hierdie inligting te illustreer.
 - Hoeveel leerders neem Wiskunde en Aardrykskunde, maar nie Geskiedenis nie?
 - Hoeveel leerders neem net Aardrykskunde?

- (d) Hoeveel leerders neem al drie vakke?
3. Papiere word genommer van 1 tot 12 en in 'n houer geplaas en die houer geskud. Een papier op 'n slag word getrek en weer teruggeplaas.
- (a) Wat is die steekproefruimte, S ?
- (b) Skryf die versameling A neer, wat die gebeurtenis voorstel van die trek van 'n papier met 'n faktor van 12 daarop.
- (c) Skryf die versameling B neer, wat die gebeurtenis voorstel van die trek 'n papier gemerk met 'n priemgetal.
- (d) Gebruik 'n Venn-diagram om A , B and S voor te stel.
- (e) Vind
- i. $n(S)$
 - ii. $n(A)$
 - iii. $n(B)$

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02q4 (2.) 02q5 (3.) 02q6

10.4 Vereniging en deursnit

 EMDDT

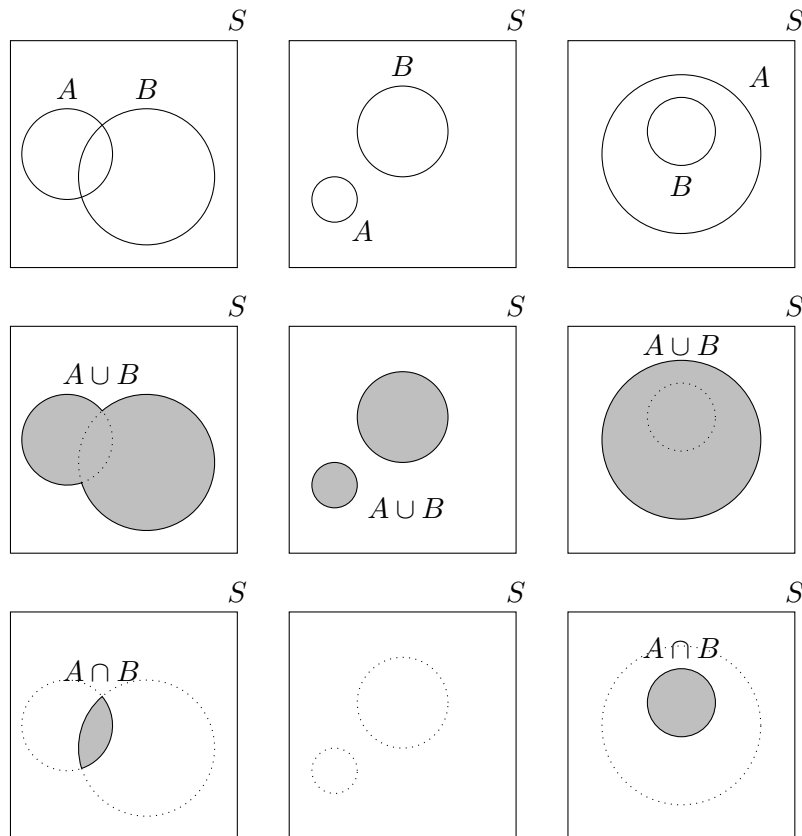
DEFINISIE: Vereniging

Die vereniging van twee versamelings is 'n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat minstens in een van die versamelings voorkom. Die vereniging word geskryf as $A \cup B$.

DEFINISIE: Deursnit

Die deursnit (of snyding of interseksie) van twee versamelings is 'n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat in beide versamelings voorkom. Die deursnit word geskryf as $A \cap B$.

Die figuur hieronder toon die vereniging en deursnit vir verskillende konfigurasies van twee gebeurtenisse in 'n steekproefruimte met behulp van 'n Venn-diagram.



Die verenigings en deursnitte van verskillende gebeurtenisse. Let op dat die middelste kolom, die deursnit, $A \cap B$, leeg is aangesien die twee versamelings nie oorvleuel nie. Verder, in die laaste kolom is die vereniging, $A \cup B$, gelyk aan A en die deursnit, $A \cap B$, gelyk aan B aangesien B ten volle bevat word deur A .

📺 Video: VMcci by www.everythingmaths.co.za

10.5 Waarskynlikheids-identiteite

$$P(S) = 1$$

Die steekproefruimte bevat per definisie alle moontlike uitkomstes van 'n eksperiment.

Ons weet dus dat die waarskynlikheid van 'n resultaat uit 'n steekproefruimte is 1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ons sal hierdie identiteit bewys deur die Venn-diagramme hierbo te gebruik. Vir elk van die 4 terme in die verenigingsidentiteit kan ons 'n Venn-diagram teken en telkens die verskillende diagramme bytel of aftrek. Die area van 'n gebied verteenwoordig sy waarskynlikheid.

Ons doen hierdie vir die eerste diagram van die Venn-diagram hierbo. Jy kan dit self probeer vir die ander kolomme.

$$\begin{aligned}
 & P(A) \quad + \quad P(B) \quad - \quad P(A \cap B) \\
 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Circle A shaded in a square]} \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Circle B shaded in a square]} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Intersection of A and B shaded in a square]} \\ \hline \end{array} \right) \\
 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Circle A shaded in a square]} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Circle B with intersection removed shaded in a square]} \\ \hline \end{array} \\
 = & \begin{array}{|c|} \hline \text{[Diagram: Union of A and B shaded in a square]} \\ \hline \end{array} \\
 = & P(A \cup B)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 6: Vereniging en deursnit van gebeurtenisse

PROBLEEM

Vergelyk die waarskynlikhede van gebeurtenisse A and B in die Voorbeeld 4 en toon aan dat die identiteit

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

bevredig word.

OPLOSSING

Stap 1 : Skryf die waarskynlikhede van die twee gebeurtenisse, hulle vereniging en hulle deursnit neer

Uit die figuur in Voorbeeld 4 kan ons die aantal uitkomst in elke gebeurtenis tel. Om die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis te verkry deel ons die grootte van die gebeurtenis deur die grootte van sy steekproefruimte wat $n(S) = 36$ is.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{14}{36}$$

Stap 2 : Skryf die identiteit neer kontroleer dit

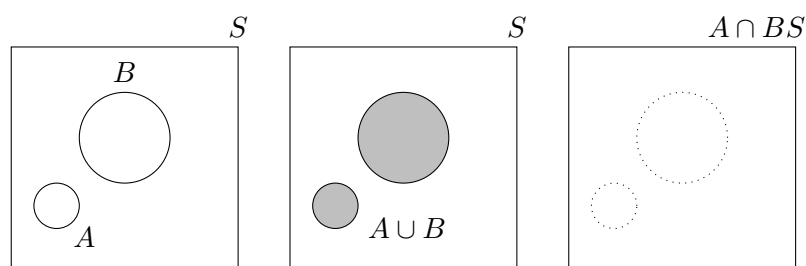
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \frac{14}{36} &= \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} \\ &= \frac{5}{36} + \frac{9}{36} \\ &= \frac{14}{36} \end{aligned}$$

10.6 Onderling uitsluitende gebeurtenisse EMDDV

DEFINISIE: Onderlinge uitsluitende gebeurtenisse

Twee gebeurtenisse is onderling uitsluitende indien hulle nie saam kan voorkom nie. Wanneer die uitkoms van 'n eksperiment in eerste gebeurtenis val, kan dit nie ook in die tweede gebeurtenis wees nie.

'n Ander manier om dit te beskrywe is om te sê dat die twee gebeurtenis-versamelings, A en B , nie elemente in gemeen kan hê nie, of $P(A \cap B) = \emptyset$ (waar $\emptyset$ die lee versameling aandui). Ons het alreeds die Venn-diagramme van onderlinge uitsluitende gebeurtenisse gesien in die middelkolom van die Venn diagramme op bladsy 335.



Uit hierdie figuur kan mens sien dat die interseksie geen elemente het nie. Mens kan ook sien dat die waarskynlikheid van die vereniging die som is van die waarskynlikhede van die gebeurtenisse.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hierdie verwantskap geld slegs vir onderlinge uitsluitende gebeurtenisse.

Voorbeeld 7: Onderling uitsluitende gebeurtenisse**PROBLEEM**

Ons rol twee dobbelstene en stel belang in die volgende twee gebeurtenisse:

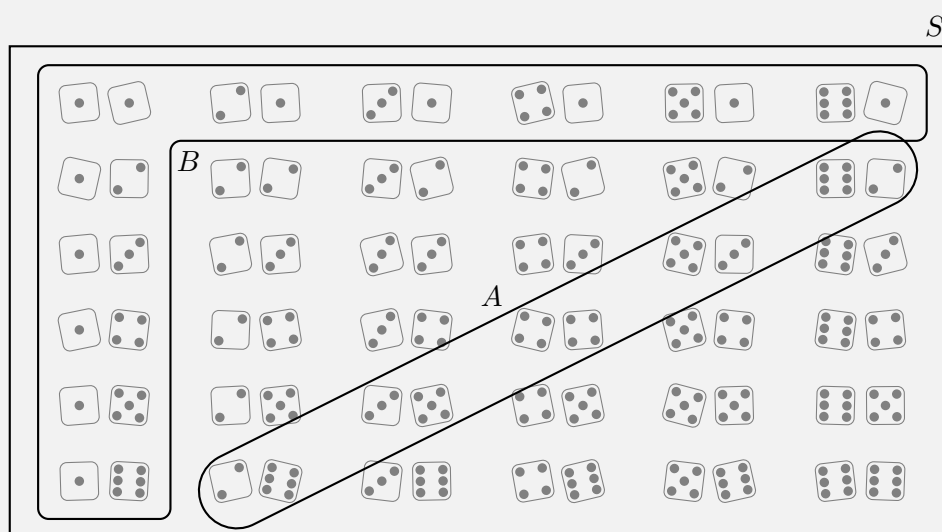
A : Die getalle op die twee dobbelstene se som is 8

B : Ten minste een dobbelsteen wys $\square$

Toon aan dat die gebeurtenisse onderling uitsluitend is.

OPLOSSING

Stap 1 : **Teken die steekproefruimte en die twee gebeurtenisse**



Stap 2 : **Bepaal die deursnit**

Uit die figuur sien ons dat A en B geen elemente in gemeen het nie. Die gebeurtenisse is dus onderling uitsluitend.

10.7 Komplementêre gebeurtenisse



DEFINISIE: Komplementêre versameling

Die komplement van 'n versameling, A , is 'n ander versameling wat al die elemente bevat wat nie in A is nie. Ons skryf die komplement van A as A' , of soms “nie(A)”.

Vir 'n eksperiment met 'n steekproefruimte S en 'n gebeurtenis A , kan ons sekere identiteite aflei vir komplementêre gebeurtenisse. Aangesien elke element van A nie in A' voorkom nie, weet ons dat komplementêre gebeurtenisse onderling uitsluitend is.

$$A \cap A' = \emptyset$$

Aangesien elke element van die steekproefruimte óf in A óf in A' voorkom, omvat die vereniging van komplementêre gebeurtenisse die steekproefruimte.

$$A \cup A' = S$$

Uit die vorige twee identiteite weet ons dat die waarskynlikhede van komplementêre gebeurtenisse saam gelyk is aan 1.

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$$

▶ Video: VMcdl by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 8: Redenering met behulp van Venn-diagramme**PROBLEEM**

In 'n opname is 70 mense gevra watter produk hulle gebruik: A of B of beide. Die verslag toon dat 25 mense produk A gebruik, 35 mense produk B gebruik en 15 mense gebruik nie een van die twee nie. Gebruik 'n Venn-diagram om te bereken hoeveel mense:

1. gebruik slegs produk A
2. gebruik slegs produk B
3. gebruik beide produk A en produk B

OPLOSSING

Stap 1 : Bepaal die groottes van die steekproefruimte, die gebeurtenis- versamelings, hulle vereniging en hulle deursnit

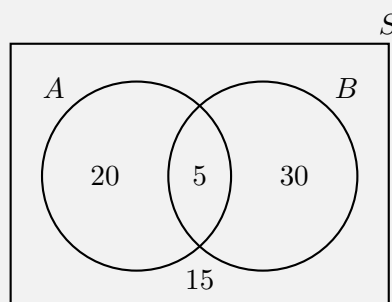
- Ons weet 70 mense het deelgeneem, dus is die grootte van die steekproefruimte $n(S) = 70$.
- Ons weet 25 mense gebruik produk A, dus is $n(A) = 25$.
- Ons weet 35 mense gebruik produk B, dus is $n(B) = 35$.
- Ons weet 15 mense gebruik nie een van die produkte nie. Dit beteken dat minstens $70 - 15 = 55$ mense ten minste een van die produkte gebruik, dus is $n(A \cup B) = 55$.
- Ons weet nie hoeveel mense beide produkte gebruik nie, dus moet ons die grootte van A die deursnit B ($A \cap B$) bereken, deur die volgende identiteit te gebruik

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 \frac{n(A \cup B)}{n(S)} &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\
 \frac{55}{70} &= \frac{25}{70} + \frac{35}{70} - \frac{n(A \cap B)}{70} \\
 \therefore n(A \cap B) &= 25 + 35 - 55 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Stap 2 : Bepaal of die gebeurtenisse onderling uitsluitend is

Aangesien die deursnit, $A \cap B$, nie leeg is nie, is die gebeurtenisse nie onderling uitsluitend nie. Dit beteken dat hulle sirkels behoort te oorvleuel in die Venn-diagram.

Stap 3 : Teken die Venn-diagram en vul die getalle in



Stap 4 : Lees die antwoorde

1. 20 mense gebruik slegs produk A.
2. 30 mense gebruik slegs produk B.
3. 5 mense gebruik beide produkte.

Oefening 10 - 3

1. 'n Kas bevat gekleurde blokkies. Die aantal van elke kleur word in die onderstaande tabel aangedui.

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pink
Aantal blokkies	24	32	41	19

'n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende kleur sal wees:

- (a) pers
 - (b) pers of wit
 - (c) pienk en oranje
 - (d) nie oranje nie?
2. 'n Klein skooltjie het 'n klas met kinders van verskillende ouderdomme. Die tabel gee die aantal kinders van elke ouderdom in die klas.

	3 jaar oud	4 jaar oud	5 jaar oud
Manlik	2	7	6
Vroulik	6	5	4

As 'n leerder willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die leerder die volgende sal wees:

- (a) vroulik
 - (b) 4 jaar oud en manlik
 - (c) 3 of 4 jaar oud
 - (d) 3 en 4 jaar oud
 - (e) nie 5 nie
 - (f) 3 of vroulik?
3. Fiona het 85 skyfies, genummer van 1 to 85. Indien 'n skyfie willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die getal:
- (a) eindig met 5
 - (b) 'n veelvoud van 3 is
 - (c) 'n veelvoud van 6 is
 - (d) 65 is
 - (e) nie 'n veelvoud van 5 is nie
 - (f) 'n veelvoud van 4 of 3 is
 - (g) 'n veelvoud van 2 en 6 is
 - (h) 1 is?

 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02q7 (2.) 02q8 (3.) 02q9

Hoofstuk 10 | Opsomming

 Opsommingsaanbieding: VMdve by www.everythingmaths.co.za

- 'n Eksperiment verwys na 'n proses met onsekerheid.
- Die uitslag van 'n eksperiment is 'n enkele resultaat van daardie eksperiment.
- Die steekproefruimte van 'n versameling is die versameling van al die moontlike uitslae van daardie eksperiment. Die steekproefruimte word aangedui deur die

simbool S en die grootte van die steekproefruimte (die som van al die moontlike uitkomst) word aangedui deur $n(S)$.

- 'n Gebeurtenis is 'n spesifieke versameling van uitkomst van 'n eksperiment waarin jy belangstel. 'n Gebeurtenis word aangedui deur die letter E en die aantal uitkomst van die gebeurtenis met $n(E)$.
- 'n Waarskynlikheid is 'n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe waarskynlik dit is dat die gebeurtenis sal plaasvind.
 - 'n Waarskynlikheid van 0 beteken dat die gebeurtenis nooit sal plaasvind nie.
 - 'n Waarskynlikheid van 1 beteken dat die gebeurtenis altyd sal plaasvind.
 - 'n Waarskynlikheid van 0,5 beteken dat die gebeurtenis die helfte van die tyd sal plaasvind, of 1 keer uit elke 2.
- 'n Waarskynlikheid kan ook as 'n persentasie of 'n breuk uitgedruk word.
- Die relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis word gedefinieer as die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom in 'n aantal eksperimente, gedeel deur die aantal eksperimente.
- Die vereniging van twee versamelings is 'n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat minstens in een van die versamelings voorkom. Die vereniging word geskryf as $A \cup B$.
- Die deursnit (of snyding of interseksie) van twee versamelings is 'n nuwe versameling wat al die elemente bevat wat in beide versamelings voorkom. Die deursnit word geskryf as $A \cap B$.
- Die waarskynlikheid van steekproefruimte: $P(S) = 1$.
- Vereniging en deursnit: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Twee gebeurtenisse is onderling uitsluitend indien hulle nie saam kan voorkom nie. Wanneer die uitkomst van 'n eksperiment in die eerste gebeurtenis val, kan dit nie ook in die tweede gebeurtenis wees nie.
- Die komplement van 'n versameling, A , is 'n ander versameling wat al die elemente bevat wat nie in A is nie. Ons skryf die komplement van A as A' , of soms "nie (A)".
- Komplementêre gebeurtenisse is onderling uitsluitend: $A \cap A' = \emptyset$.
- Komplementêre gebeurtenisse vul die steekproefruimte: $A \cup A' = S$.
- Die waarskynlikhede van komplementêre gebeurtenisse saam gelyk is 1: $P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$.

Hoofstuk 10**Einde van Hoofstuk Oefeninge**

1. 'n Groep van 45 kinders is gevra of hulle Frosties en/of Strawberry Pops eet. 31 eet beide en 6 eet net Frosties. Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind wat willekeurig gekies word net Strawberry Pops eet?
2. In 'n groep van 42 leerders het almal behalwe 3 'n pakkie skyfies of 'n Fanta of beide gehad. As 23 'n pakkie skyfies gehad het, en 7 hiervan het ook 'n Fanta gehad, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word die volgende het:
 - (a) beide skyfies en Fanta
 - (b) net Fanta
3. Gebruik 'n Venn-diagram om die volgende waarskynlikhede van 'n dobbelsteen wat gerol word te bereken:
 - (a) 'n veelvoud van 5 en 'n onewe getal
 - (b) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie en ook nie 'n onewe getal nie
 - (c) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie, maar onewe.
4. 'n Pakkie het geel en pienk lekkers. Die waarskynlikheid om 'n pienk lekker te kies is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid om 'n geel lekker uit te haal?
5. In 'n parkeerterrein met 300 motors is daar 190 Opels. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste motor wat uitry die volgende is:
 - (a) 'n Opel
 - (b) nie 'n Opel nie
6. Tamara het 18 los sokkies in 'n laai. Agt van hierdie is oranje en twee pienk. Bereken die waarskynlikheid dat die eerste sokkie wat willekeurig gekies word die volgende is:
 - (a) oranje
 - (b) nie oranje
 - (c) pienk
 - (d) nie pienk
 - (e) oranje of pienk
 - (f) nie oranje of pienk nie
7. Daar is 9 brosbroodkoekies, 4 gemmerkoekies, 11 sjokoladekoekies en 18 Jambos op 'n bord. As 'n koekie willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat:

- (a) dit 'n gemmerkoekie of 'n Jambo is
 - (b) dit nie 'n broodkoekie is nie
8. 280 kaartjies is verkoop in 'n lotery. Ingrid het 15 gekoop. Wat is die waarskynlikheid dat Ingrid:
- (a) die prys wen
 - (b) nie die prys wen nie
9. Die kinders in 'n kleuterskool is geklassifiseer per haarkleur en oogkleur. 44 het rooi hare en nie bruin oë nie, 14 het bruin oë maar nie rooi hare nie en 40 het nie bruin oë of rooi hare nie.
- (a) Hoeveel kinders is in die skool?
 - (b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind willekeurig gekies word die volgende het:
 - i. bruin oë
 - ii. rooi hare
 - (c) 'n Kind met bruin oë word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat hierdie kind rooi hare het?
10. 'n Houer bevat pers, blou en swart lekkers. Die waarskynlikheid dat 'n lekker willekeurig gekies word pers is, is $\frac{1}{7}$, en die waarskynlikheid dat dit swart sal wees is $\frac{3}{5}$.
- (a) As ek 'n lekker willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dit die volgende sal wees:
 - i. pers of blou
 - ii. swart
 - iii. pers
 - (b) As daar 70 lekkers in die houer is, hoeveel perses is daar?
 - (c) $\frac{2}{5}$ van die pers lekkers in (b) het strepe en die res nie, hoeveel pers lekkers het strepe?
11. Vir elk van die volgende, teken 'n Venn-diagram om die situasie voor te stel en vind 'n voorbeeld ter illustrasie:
- (a) 'n steekproefruimte waarin daar twee gebeurtenisse is wat nie ondeling uitsluitend is nie
 - (b) 'n steekproefruimte waarin daar twee komplementêre gebeurtenisse is
12. Gebruik 'n Venn-diagram om te bewys dat die waarskynlikheid van voorkoms van gebeurtenis A of B (A en B is nie onderling uitsluitend nie) gegee word deur:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

13. Al die klawerkaarte word uit 'n pak kaarte gehaal. Die res word dan geskommel en een kaart gekies. Die kaart word dan teruggeplaas voor die volgende een gekies word.
- (a) Wat is die steekproefruimte?
 - (b) Vind 'n versameling om gebeurtenis P , die trek van 'n prentkaart, voor te stel.
 - (c) Vind 'n versameling om gebeurtenis N , die trek van 'n nommerkaart, voor te stel.
 - (d) Vertoon die bostaande gebeurtenisse in 'n Venn-diagram.
 - (e) Wat is 'n goeie beskrywing van die versamelings P en N ?
(Wenk: Vind enige elemente van P in N en van N in P .)
14. 'n Opname was by Mutende Primêre Skool uitgevoer om vas te stel hoeveel van die 650 leerders vetkoek, en hoeveel lekkers tydens pouse koop. Die volgende was bevind:
- 50 leerders het niks gekoop nie
 - 400 leerders het vetkoek gekoop
 - 300 leerders het lekkers gekoop
- (a) Vertoon hierdie inligting met 'n Venn-diagram
 - (b) Indien 'n leerder willekeurig gekies is, bereken die waarskynlikheid dat die leerder die volgende koop:
 - i. net lekkers
 - ii. net vetkoek
 - iii. nie vetkoek of lekkers nie
 - iv. vetkoek en lekkers
 - v. vetkoek of lekkers
15. In 'n opname by Lwandani se Sekondêre Skool is 80 mense gevra of hulle die Sowetan of die Daily Sun of albei koerante lees. Die verslag toondat 45 mense die Daily Sun lees, 30 die Sowetan lees en 10 lees nie een van die twee nie. Gebruik 'n Venn-diagram om die persentasie van mense te vind wat:
- (a) net die Daily Sun lees
 - (b) net die Sowetan lees
 - (c) die Daily Sun en die Sowetan lees

- (1.) 02qa (2.) 02qb (3.) 02qc (4.) 02qd (5.) 02qe (6.) 02qf
(7.) 02qg (8.) 02qh (9.) 02qi (10.) 02qj (11.) 02qk (12.) 02qm
(13.) 02qn (14.) 02qp (15.) 02qq

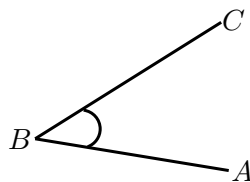
Meetkunde (Grieks: geo = aarde, metria = meet) het ontstaan as die veld van kennis van ruimtelike verbande. Dit was een van die twee velde van pre-moderne wiskunde. Die ander veld was die studie van getalle. In die moderne tyd het meetkundige begrippe baie kompleks en abstrak geraak en is dit skaars herkenbaar as 'n uitvloeisel van vroëre meetkunde.

▶ Video: VMchw by www.everythingmaths.co.za

Hoeke

www EMDDX

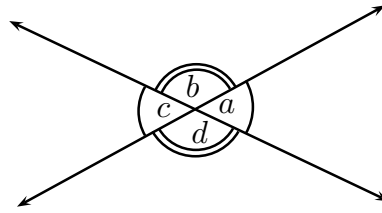
'n Hoek word gevorm as twee lyne in 'n gemeenskaplike punt ontmoet. Die punt waar twee lyne ontmoet staan bekend as die hoekpunt. Hoeke word aangedui deur 'n $\wedge$ (genoem 'n kappie) bo 'n letter te plaas. Hoeke kan ook aangedui word met behulp van die lyn segmente waaruit die hoek bestaan, byvoorbeeld $C\hat{B}A$ of $A\hat{B}C$. Die $\angle$ simbool is 'n kort metode om hoek te skryf in meetkunde en word dikwels gebruik vir frases soos "som van $\angle$ 'e in 'n $\triangle$ ". Hoeke word gemeet in grade wat aangedui word deur die simbool $^\circ$, 'n klein sirkeltjie bokant die teks soos 'n eksponent.



Eienskappe en notasie

www EMDDY

In die diagram hieronder, sny die twee reguitlyne AB en CD by punt X , om vier hoeke $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ en $\hat{d}$ te vorm.



Die volgende tabel gee 'n opsomming van die spesiale hoekpare wat gevorm word as twee reguitlyne mekaar sny.

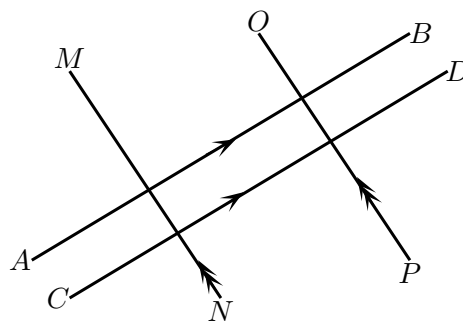
Term	Eienskap	Byvoorbeeld
Skerphoek	$0^\circ < \text{hoek} < 90^\circ$	$\hat{a}; \hat{c}$
Regte hoek	$\text{Hoek} = 90^\circ$	
Stomphoek	$90^\circ < \text{hoek} < 180^\circ$	$\hat{b}; \hat{d}$
Gestrekte hoek	$\text{Hoek} = 180^\circ$	$\hat{a} + \hat{b}; \hat{b} + \hat{c}$
Inspringende hoek	$180^\circ < \text{hoek} < 360^\circ$	$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$
Aangrensende hoeke	Hoeke wat 'n hoekpunt en 'n gemeenskaplike sy deel.	$\hat{a}$ en $\hat{d}; \hat{c}$ en $\hat{d}$
Teenoorstaande of re- goorstaande hoeke	Hoeke regoor mekaar wanneer twee lyne mekaar sny. Hulle deel 'n hoekpunt en is ewe groot.	$\hat{a} = \hat{c}; \hat{b} = \hat{d}$
Supplementêre hoeke	Hoeke waarvan die som 180° is.	$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ; \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$
Komplementêre hoeke	Hoeke waarvan die som 90° is.	
Omwenteling	Som van al die hoeke om 'n punt.	$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360^\circ$

Let op dat aangrensende hoeke op 'n reguitlyn supplementêr is.

Ewewydige lyne en dwarslyne



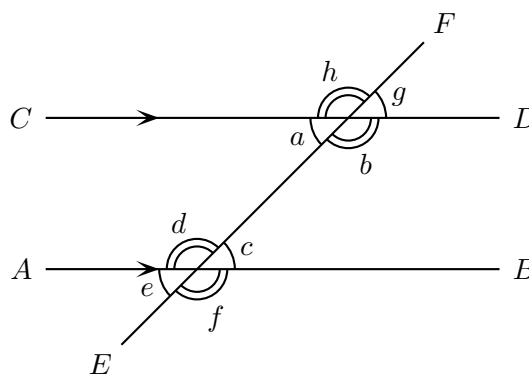
Twee lyne sny mekaar as hulle kruis by 'n punt. Byvoorbeeld, by 'n verkeerskruising sny twee of meer strate en die snypunt van die kruising is die gemeenskaplike punt tussen die strate. Ewewydige lyne is lyne wat nooit kruis nie. Hulle word aangedui deur pyle, soos hieronder getoon is.



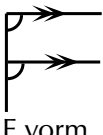
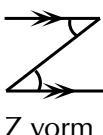
Ons gebruik twee vertikale lyne om aan te dui dat die twee lyne ewewydig is:

$$AB \parallel CD \text{ en } MN \parallel OP$$

'n Dwarslyn van twee of meer lyne is 'n lyn wat hierdie lyne sny. In die figuur hieronder, is $AB \parallel CD$ en EF is 'n dwarslyn.



Die eienskappe van hoeke wat gevorm word by hierdie kruisende lyne word opgesom in die volgende tabel:

Naam van hoeke	Definisie	Byvoorbeeld	Notas
Binnehoeke	Hoeke wat binne die ewewydige lyne lê	$\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ en $\hat{d}$ is binnehoeke	Die woord binnehoeke beteken "tussen die lyne"
Buitehoeke	Hoeke wat buite die ewewydige lyne lê	$\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ en $\hat{h}$ is buitehoeke	Die woord buitehoeke beteken "aan die buitekant"
Ooreenkomstige hoeke	Die hoeke aan dieselfde kant van die snylyn en aan dieselfde kant van die lyne. As die lyne ewewydige is, is die ooreenkomstige hoeke gelyk.	$\hat{a}$ en $\hat{e}$, $\hat{b}$ en $\hat{f}$, $\hat{c}$ en $\hat{g}$, $\hat{d}$ en $\hat{h}$ is pare ooreenkomstige hoeke: $\hat{a} = \hat{e}$, $\hat{b} = \hat{f}$, $\hat{c} = \hat{g}$ en $\hat{d} = \hat{h}$.	 F vorm
Ko-binnehoeke	Ko-binnehoeke wat aan dieselfde kant van die snylyn lê. As die lyne ewewydig is, is die ko-binnehoeke gelyk.	$\hat{a}$ en $\hat{d}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$ is ko-binnehoeke. $\hat{a} + \hat{d} = 180^\circ$, $\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$.	 C vorm
Verwisselende binnehoeke	Die binnehoeke wat aan verskillende kante van die snylyn lê. As die lyne ewewydige is, is die verwisselende hoeke ewe groot.	$\hat{a}$ en $\hat{c}$, $\hat{b}$ en $\hat{d}$ is pare verwisselende binnehoeke: $\hat{a} = \hat{c}$, $\hat{b} = \hat{d}$.	 Z vorm

As twee ewewydige lyne gesny word met 'n dwarslyn, sodat:

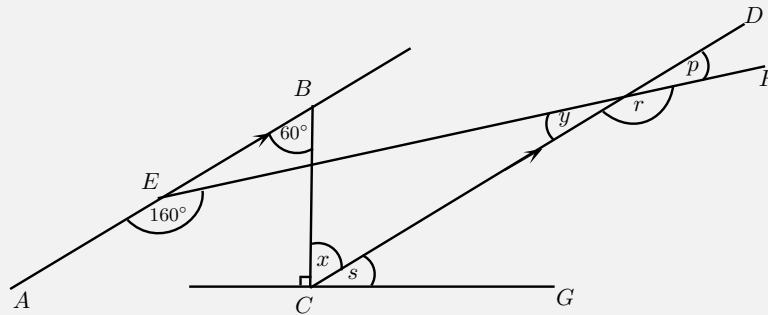
- ooreenkomstige hoeke gelyk is; of
- verwisselende binnehoeke gelyk is; of
- ko-binnehoeke aan dieselfde kant van die snylyn supplementêr is

dan is die twee lyne ewewydig.

Voorbeeld 1: Berekening van hoeke

PROBLEEM

Vind al die onbekende hoeke in die volgende figure. Is $EF \parallel CG$? Verduidelik jou antwoord.



OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik eienskappe van ewewydige lyne om alle gelyke hoeke op die diagram te identifiseer**

Stap 2 : **Vind al die onbekende hoeke**

$$AB \parallel CD \quad (\text{gegee})$$

$$\therefore \hat{x} = 60^\circ \quad (\text{verwisselende binne } \angle'e)$$

$$\hat{y} + 160^\circ = 180^\circ \quad (\text{ko-binne } \angle'e)$$

$$\therefore \hat{y} = 20^\circ$$

$$\hat{p} = \hat{y} \quad (\text{regoorstaande } \angle'e)$$

$$\therefore \hat{p} = 20^\circ$$

$$\hat{r} + \hat{p} = 180^\circ \quad (\text{som van } \angle'e \text{ op 'n reguitlyn})$$

$$\therefore \hat{r} = 160^\circ$$

$$\hat{s} + \hat{x} = 90^\circ \quad (\text{komplementêre } \angle'e)$$

$$\hat{s} + 60^\circ = 90^\circ$$

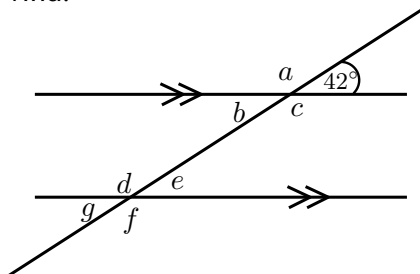
$$\therefore \hat{s} = 30^\circ$$

Stap 3 : **Bewys of** $EF \parallel CG$

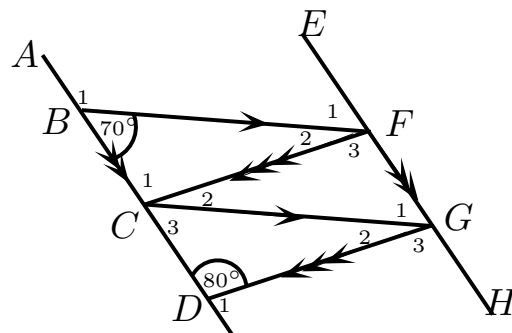
Indien $EF \parallel CG$ dan sal $\hat{p}$ gelyk aan ooreenkomstige hoek $\hat{s}$ wees, maar $\hat{p} = 20^\circ$ en $\hat{s} = 30^\circ$. Dus is EF nie ewewydig aan CG nie.

Oefening 11 - 1

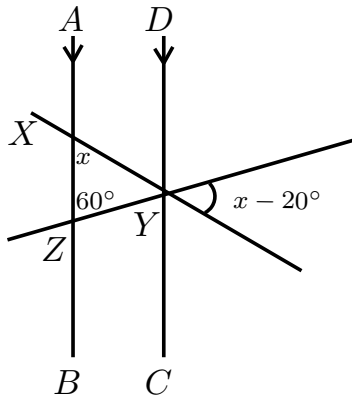
1. Gebruik aangrensende, ooreenkomstige, verwisselende en ko-binnehoeke om al die hoeke wat met letters benoem is in die diagram hieronder, te vind:



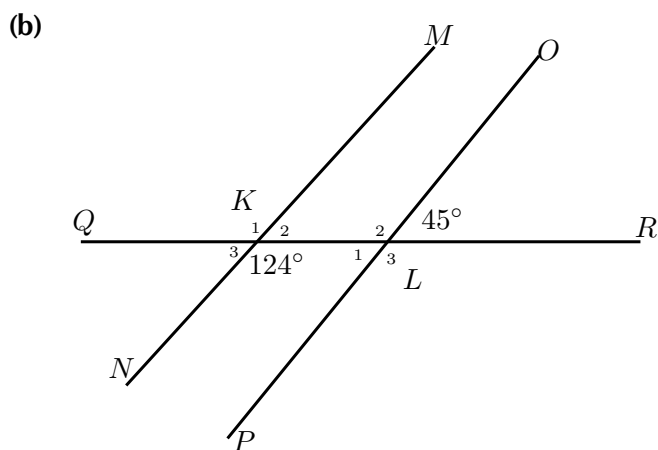
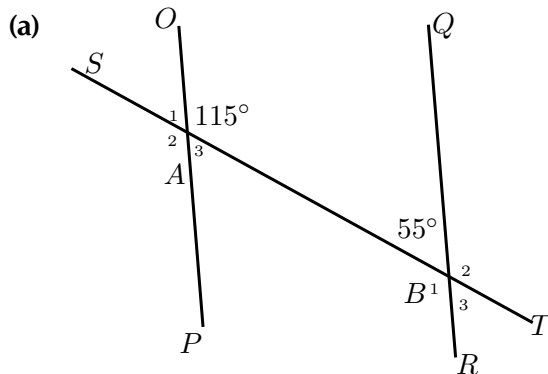
2. Vind al die onbekende hoeke in die figuur hieronder:

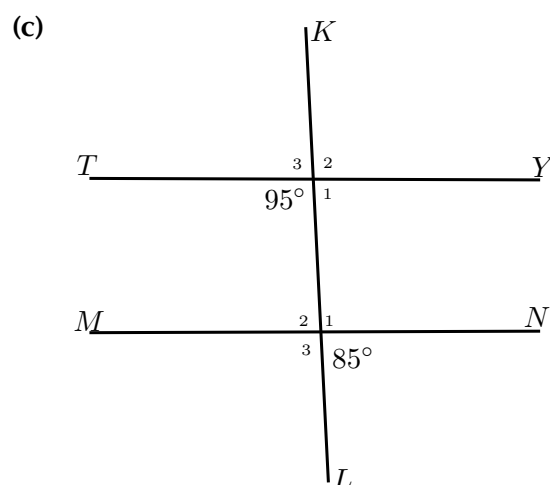


3. Vind die waarde van x in die figuur hieronder:



4. Bepaal of daar pare ewewydige lyne is in die volgende figure:





5. As AB ewewydig aan CD is en AB ewewydig aan EF is, bewys dat CD ewewydig is aan EF .



(A+) Meer oefening
 (▶) video oplossings
 (?) of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02n7 (2.) 02n8 (3.) 02n9 (4.) 02na (5.) 02nb

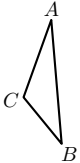
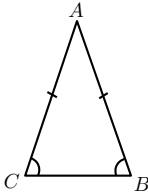
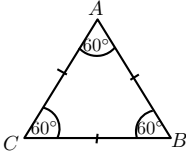
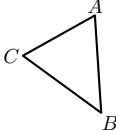
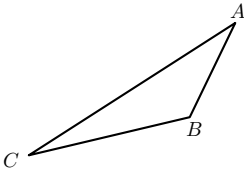
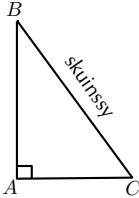
Klassifikasie van driehoeke



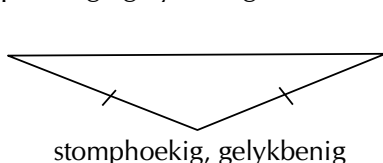
'n Driehoek is 'n driesydige veelhoek. Driehoeke kan geklassifiseer word volgens sye of volgens hoeke: ongelyksydig, gelyksydig, gelykbenig, reghoekig, skerphoekig, stomphoekig.

As die hoekpunte van 'n driehoek benoem word met A , B , en C , dan praat ons van $\triangle ABC$.

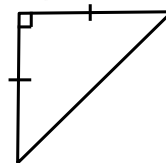
▶ Video: VMciu by www.everythingmaths.co.za

Naam	Diagram	Eienskappe
Ongelyksydig		Alle sye en alle hoeke is van verskillende lengtes/groottes.
Gelykbenig		Twee sye is ewe lank. Die hoeke teenoor die gelyke sye is ewe groot.
Gelyksydig		Al 3 sye is ewe lank (aangedui met die kort strepies wat getrek is deur die gelyke sye) en al 3 die hoeke is ewe groot.
Skerp		Elke binnehoek is kleiner as 90° .
Stomp		Een binnehoek is groter as 90° .
Reghoekig		Een binnehoek is 90° .

Verskillende kombinasies van hierdie eienskappe is ook moontlik. Byvoorbeeld, 'n stomphoekige gelykbenige driehoek en 'n reghoekige gelykbenige driehoek word getoon:



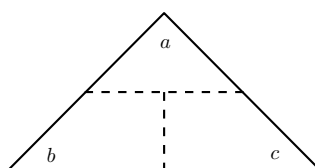
stomphoekig, gelykbenig



reghoekig, gelykbenig

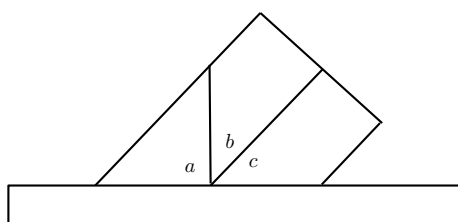
Ondersoek:

Binnehoeke van 'n driehoek



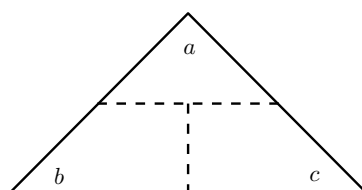
1. Trek 'n driehoek van enige grootte of vorm op 'n vel papier.
2. Sny dit uit en benoem die hoeke, $\hat{a}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$, aan beide kante van die papier.
3. Trek stippellyne soos aangetoon en sny langs hierdie lyne om 3 stukke papier te kry.
4. Plaas die 3 stukke teen jou liniaal soos aangetoon.
5. Watter gevolgtrekking kan ons maak?

Wenk: Wat is die som van die hoeke op 'n reguitlyn?



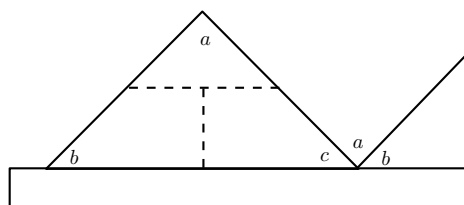
Ondersoek:

Buitehoeke van 'n driehoek



1. Trek 'n driehoek van enige grootte of vorm op 'n vel papier. Maak 'n kopie van die driehoek op 'n ander vel papier.

2. Sny dit uit en benoem die hoeke $\hat{a}$, $\hat{b}$ en $\hat{c}$ aan beide kante van die papier.
3. Trek stippellyne soos aangetoon op **een** driehoek en sny langs hierdie lyne.
4. Plaas die tweede driehoek en die uitgesnyde stukke soos getoon in die figuur hieronder.
5. Watter gevolgtrekking kan ons maak?

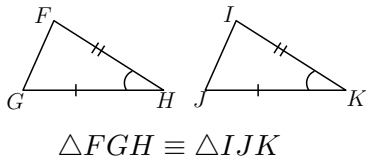
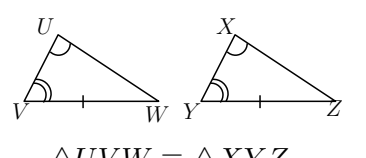


Kongruente driehoeke

EMDEB

Twee driehoeke is kongruent as die een presies op die ander een pas. Dit beteken dat die driehoek se hoeke en sye ooreenkomstig gelyk is. Om te bepaal of twee driehoeke kongruent is is dit nie nodig om elke hoek en elke sy gelyk te bewys nie. Die volgende tabel beskryf die kongruensie vereistes:

Simbool	Beskrywing	Diagram
RSS (90° , skuinssy, sy)	As die skuinssy en een ander sy van een reghoekige driehoek gelyk is aan die skuinssy en ooreenkomstige ander sy van 'n tweede driehoek, dan is die driehoeke kongruent.	$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$
SSS (sy, sy, sy)	As die drie sye van 'n driehoek net so lank is soos die ooreenkomstige drie sye van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	$\triangle PQR \equiv \triangle STU$

Simbool	Beskrywing	Diagram
SHS (sy, hoek, sy)	As drie sye en die ingeslote hoek van een driehoek net so groot is soos twee sye en die ingeslote hoek van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle FGH \equiv \triangle IJK$
HHS (hoek, hoek, sy)	As een sy en twee hoeke van 'n driehoek net so groot is as die ooreenkomstige sy en twee hoeke van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	 $\triangle UVW \equiv \triangle XYZ$

Die volgorde van die letters wanneer kongruente driehoek benoem word, is baie belangrik.

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Hierdie notasie dui die volgende eienskappe van die twee driehoeke aan:

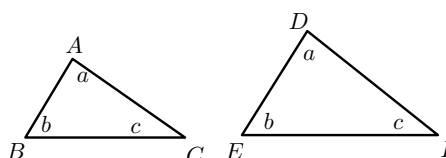
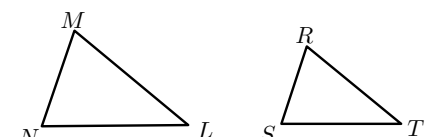
$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \text{ en } \hat{C} = \hat{F}$$

$$AB = DE, AC = DF, \text{ en } BC = EF$$

Gelykvormige driehoeke



Twee driehoeke is gelykvormig as een driehoek 'n vergroting van die ander is. Dit beteken dat hulle ooreenkomstige hoeke ewe groot in die meet is en die verhouding van die ooreenstemmende sye in verhouding is. Die twee driehoeke het dieselfde vorm, maar 'n ander skaal. Kongruente driehoeke is altyd gelykvormig, maar nie alle gelykvormige driehoeke is kongruent nie. Die volgende tabel beskryf die vereistes vir gelykvormigheid:

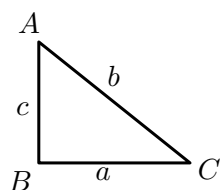
Simbool	Beskrywing	Diagram
HHH (hoek, hoek, hoek)	As drie hoeke van een driehoek gelyk is aan die drie hoeke van 'n ander driehoek is die driehoeke gelykvormig.	 $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$ $\therefore \triangle ABC \parallel \triangle DEF$
SSS (sy, sy, sy)	As al drie sye van 'n driehoek eweredig is aan die ooreenstemmende drie sye van 'n ander driehoek, dan is die driehoeke gelykvormig.	 $\frac{MN}{RS} = \frac{ML}{RT} = \frac{NL}{ST}$ $\therefore \triangle MNL \parallel \triangle RST$

Die volgorde van letters vir gelykvormige driehoeke is baie belangrik. Benoem altyd gelykvormige driehoeke in ooreenkomstige volgorde. Byvoorbeeld,

$$\triangle MNL \parallel \triangle RST \text{ is reg, maar}$$

$$\triangle MNL \parallel \triangle RTS \text{ is nie reg nie.}$$

Die stelling van Pythagoras

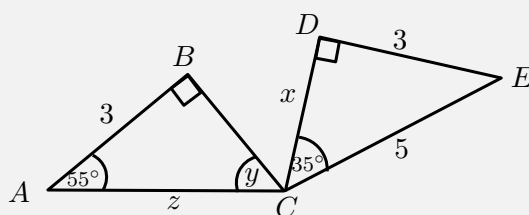


As $\triangle ABC$ 'n reghoekige driehoek is met $\hat{B} = 90^\circ$, dan $b^2 = a^2 + c^2$.

Omgekeerde: As $b^2 = a^2 + c^2$, dan is $\triangle ABC$ 'n reghoekige driehoek, dus $\hat{B} = 90^\circ$.

Voorbeeld 2: Driehoeke**PROBLEEM**

Bepaal of die 2 driehoeke in die volgende figuur kongruent is en gebruik dan die resultaat om die onbekendes, x , y en z te vind.

**OPLOSSING**

Stap 1 : **Ondersoek die inligting wat gegee is vir die twee driehoeke**

Stap 2 : **Bepaal of $\triangle CDE \equiv \triangle CBA$**

In $\triangle CDE$,

$$\hat{D} + \hat{C} + \hat{E} = 180^\circ \quad (\text{som van } \angle\text{'e van } \triangle)$$

$$90^\circ + 35^\circ + \hat{E} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{E} = 55^\circ$$

In $\triangle CDE$ en $\triangle CBA$,

$$\hat{DEC} = \hat{BAC} = 55^\circ \quad (\text{bewys})$$

$$\hat{CDE} = \hat{CBA} = 90^\circ \quad (\text{gegee})$$

$$DE = BA = 3 \quad (\text{gegee})$$

$$\therefore \triangle CDE \equiv \triangle CBA \quad (\text{HHS})$$

Stap 3 : **Bereken die onbekende veranderlikes in elk van die volgende figure**

In $\triangle CDE$,

$$CE^2 = DE^2 + CD^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$$5^2 = 3^2 + x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$\therefore x = 4$$

In $\triangle CBA$,

$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{y} = 180^\circ \quad (\text{som van } \angle\text{'e van } \triangle)$$

$$90^\circ + 55^\circ + \hat{y} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{y} = 35^\circ$$

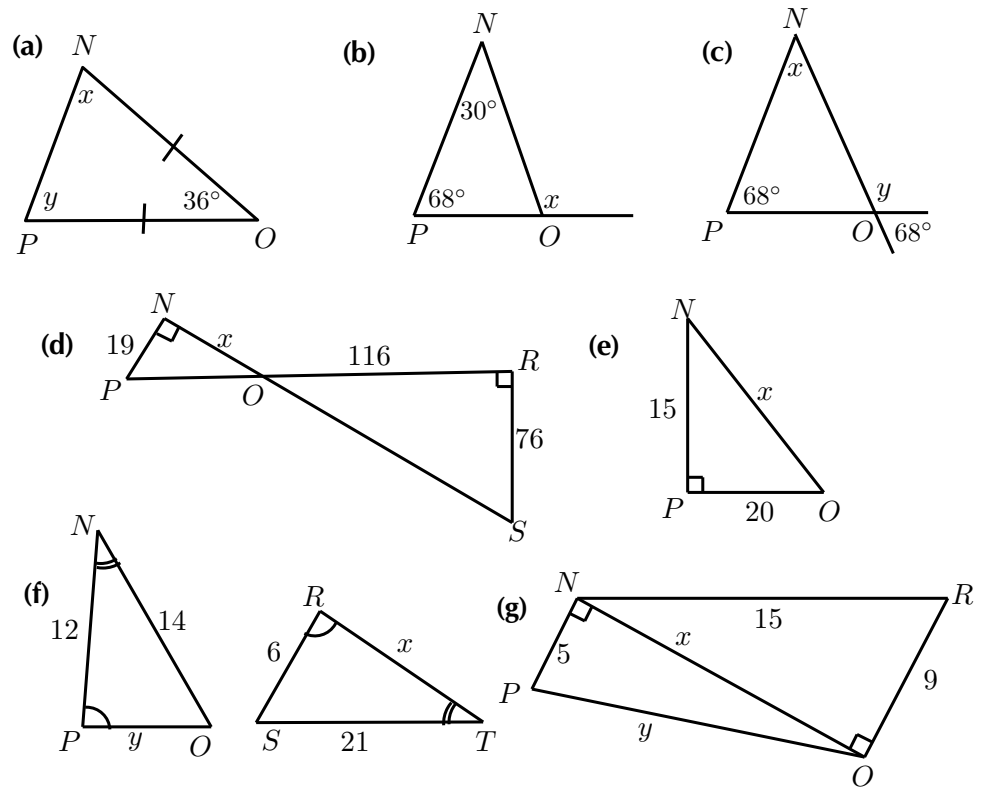
$$\triangle CDE \equiv \triangle CBA \quad (\text{bewys})$$

$$CE = CA$$

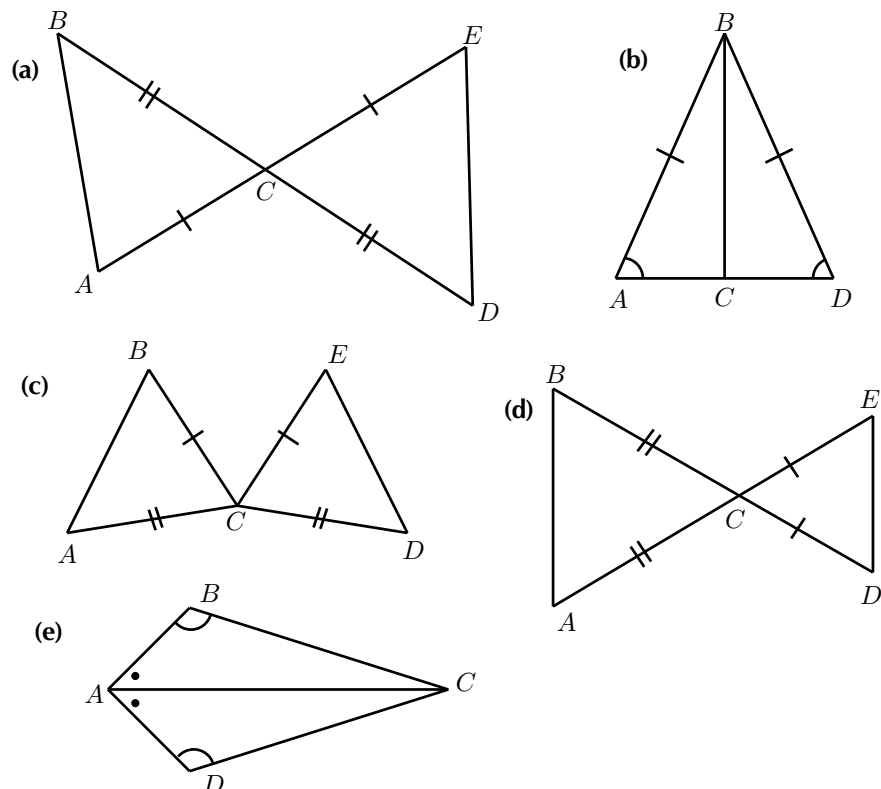
$$\therefore z = 5$$

Oefening 11 - 2

1. Bereken die onbekende veranderlikes in elk van die volgende figure.



2. Bepaal of elk van die volgende pare driehoeke kongruent is of nie. Gee redes vir jou antwoorde. As daar nie genoeg inligting is om 'n besluit te neem nie, sê hoekom.



 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.) 02nc (2.) 02nd

11.1 Vierhoeke



DEFINISIE: Vierhoek

'n Vierhoek is 'n geslote viersydige figuur.

 Video: VMcjo by www.everythingmaths.co.za

Parallelogram



DEFINISIE: Parallelogram

'n Parallelogram is 'n vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig.

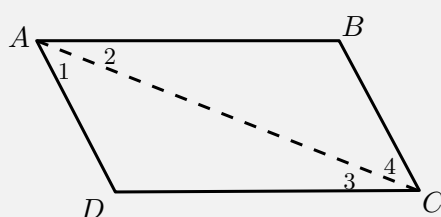
Voorbeeld 3: Eienskappe van 'n parallelogram

PROBLEEM

$ABCD$ is 'n parallelogram met $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$.

Bewys dat:

1. $AB = DC$ en $AD = BC$
2. $\hat{A} = \hat{C}$ en $\hat{B} = \hat{D}$


OPLOSSING

Stap 1 : **Verbind** AC om $\triangle ABC$ en $\triangle CDA$ te vorm

Stap 2 : **Gebruik eienskappe van ewewydige lyne en vul alle gelyke hoeke in op die diagram**

Stap 3 : **Bewys** $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

In $\triangle ABC$ en $\triangle CDA$,

$$\hat{A}_2 = \hat{C}_3 \quad (\text{verwisselende } \angle\text{'e, } AB \parallel DC)$$

$$\hat{C}_4 = \hat{A}_1 \quad (\text{verwisselende } \angle\text{'e, } BC \parallel AD)$$

AC is 'n gemene sy

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA \quad (\text{HHS})$$

$$\therefore AB = CD \text{ en } BC = DA$$

$\therefore$ Teenoorstaande sye van 'n parallelogram is ewe lank.

Ons het alreeds bewys dat $\hat{A}_2 = \hat{C}_3$ en $\hat{A}_1 = \hat{C}_4$. Dus,

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C}_3 + \hat{C}_4 = \hat{C}$$

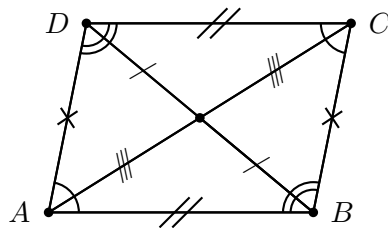
Ook,

$$\hat{B} = \hat{D} \quad (\triangle ABC \equiv \triangle CDA)$$

Dus teenoorstaande hoeke van 'n parallelogram is ewe groot.

'n Opsomming van die eienskappe van 'n parallelogram is:

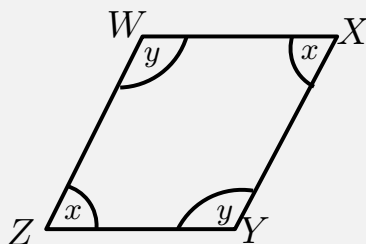
- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Die hoeklyne/diagonale halveer mekaar.



Voorbeeld 4: Bewys dat 'n vierhoek 'n parallelogram is

PROBLEEM

Bewys dat as albei pare teenoorstaande hoeke in 'n vierhoek gelyk aan mekaar is, is die vierhoek 'n parallelogram.



OPLOSSING

Stap 1 : Vind die verhouding tussen $\hat{x}$ en $\hat{y}$

In $WXYZ$

$$\hat{W} = \hat{Y} = \hat{y} \quad (\text{gegee})$$

$$\hat{Z} = \hat{X} = \hat{x} \quad (\text{gegee})$$

$$\hat{W} + \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} = 360^\circ \quad (\text{som van binne } \angle\text{'e van vierhoek.})$$

$$\therefore 2\hat{x} + 2\hat{y} = 360^\circ$$

$$\therefore \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$\hat{W} + \hat{Z} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$= 180^\circ$$

Maar hulle is ko-binnehoeke tussen lyne WX en ZY .

Dus $WX \parallel ZY$.

Stap 2 : Vind ewewydig lyne

Soortgelyk $\hat{W} + \hat{X} = 180^\circ$.

Hulle is ook ko-binnehoeke tussen lyne XY en WZ .

Dus $XY \parallel WZ$.

Beide pare teenoorstaande sye van vierhoek $WXYZ$ is ewewydig, dus $WXYZ$ is 'n parallelogram.

Onderzoek:

Bewys dat 'n vierhoek 'n parallelogram is

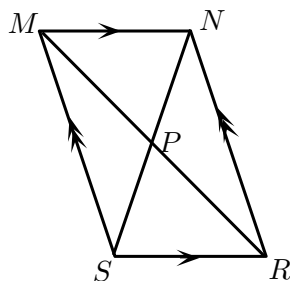
1. Bewys dat as beide pare teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk is, is die vierhoek 'n parallelogram.
2. Bewys dat as die hoeklyne van 'n vierhoek mekaar halveer, is die vierhoek 'n parallelogram.
3. Bewys dat as een paar teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk en ewewydig is, is die vierhoek 'n parallelogram.

'n Vierhoek is 'n parallelogram as:

- Beide pare teenoorstaande sye ewewydig is.
- Beide pare teenoorstaande sye ewe lank is.
- Beide pare teenoorstaande hoeke ewe groot is.
- Die hoeklyne mekaar halveer.
- Een paar teenoorstaande sye ewewydig en gelyk is.

Oefening 11 - 3

1. Bewys dat die diagonale van parallelogram $MNRS$ mekaar halveer in P .



Wenk: Gebruik kongruensie.

Meer oefening video oplossings of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ne

Reghoek



DEFINISIE: Reghoek

'n Reghoek is 'n parallelogram met al vier hoeke ewe groot en gelyk aan 90 grade.

'n Reghoek het al die eienskappe van 'n parallelogram:

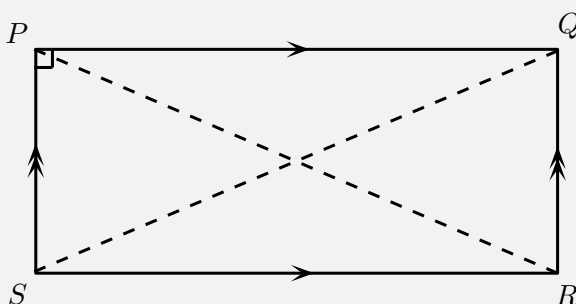
- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Die hoeklyne halveer mekaar.

Dit het ook die volgende spesiale eienskap:

Voorbeeld 5: Spesiale eienskappe van 'n reghoek

PROBLEEM

$PQRS$ is 'n reghoek. Bewys dat die diagonale ewe lank is.



OPLOSSING

Stap 1 : **Verbind P met R en Q met S om $\triangle PSR$ en $\triangle QRS$ te vorm**

Stap 2 : **Gebruik die definisie van 'n reghoek om alle gelyke hoeke en sye te**

merk op die diagram

Stap 3 : **Bewys** $\triangle PSR \equiv \triangle QRS$

In $\triangle PSR$ en $\triangle QRS$

$$PS = QR \quad (\text{teenoorstaande sye reghoek})$$

SR (teenoorstaande sye reghoek)

$$\hat{P}SR = \hat{Q}RS = 90^\circ \quad (\text{binne } \angle \text{ van reghoek})$$

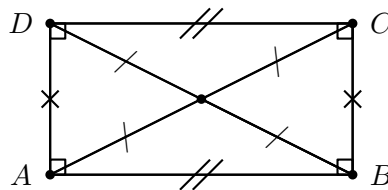
$$\therefore \triangle PSR \equiv \triangle QRS \quad (\text{SHS})$$

Dus $PR = QS$

Die hoeklyne van 'n reghoek is ewe lank.

Opsomming van die eienskappe van reghoeke:

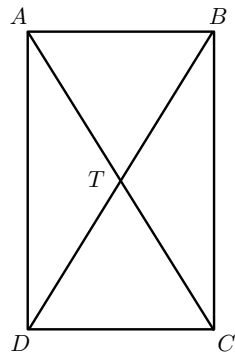
- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Die hoeklyne halveer mekaar.
- Alle hoeke is regte hoeke (90°).
- Die hoeklyne is ewe lank.



Oefening 11 - 4

1. $ABCD$ is 'n vierhoek. Hoeklyne AC en BD sny by T . $AC = BD$, $AT = TC$, $DT = TB$. Bewys dat:

- $ABCD$ 'n parallelogram is.
- $ABCD$ 'n reghoek is.



Meer oefening video oplossings of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.) 02nf

Ruit



DEFINISIE: Ruit / rombus

'n Ruit is 'n parallelogram waarvan al vier sye ewe lank is.

'n Ruit het al die eienskappe van 'n parallelogram:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Die hoeklyne halveer mekaar.

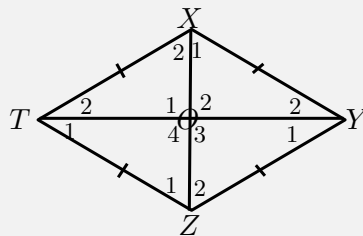
Dit het ook twee spesiale eienskappe:

Voorbeeld 6: *Spesiale eienskappe van 'n ruit*

PROBLEEM

$XYZT$ is 'n ruit. Bewys dat:

1. die hoeklyne mekaar loodreg halveer.
2. die hoeklyne die binnehoeke halveer.



OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik die definisie van 'n ruit om alle gelyke hoeke en sye op die diagram te merk**

Stap 2 : **Bewys $\triangle XTO \equiv \triangle ZTO$**

$$XT = ZT \quad (\text{Al vier sye is ewe lank})$$

TO is 'n gemeenskaplike sy

$$XO = ZO \quad (\text{Diagonale halveer mekaar})$$

$$\therefore \triangle XTO \equiv \triangle ZTO \quad (\text{SSS})$$

$$\therefore \hat{O}_1 = \hat{O}_4$$

$$\text{Maar } \hat{O}_1 + \hat{O}_4 = 180^\circ \quad (\text{som van } \angle\text{'e op reguitlyn})$$

$$\therefore \hat{O}_1 = \hat{O}_4 = 90^\circ$$

Ons kan vervolgens aflei dat $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^\circ$.

Dus halveer die hoeklyne mekaar loodreg.

Stap 3 : Gebruik kongruente driehoeke om te bewys die hoeklyne halveer die hoeke

$$\hat{X}_2 = \hat{Z}_1 \quad (\triangle XTO \equiv \triangle ZTO)$$

$$\text{en } \hat{X}_2 = \hat{Z}_2 \quad (\text{verwisselende binne } \angle'e, XT \parallel YZ)$$

$$\therefore \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$$

Dus, hoeklyn XZ halveer $\hat{Z}$. Soortgelyk, kan ons aantoon XY halveer $\hat{X}$ en hoeklyn TY halveer $\hat{T}$ en $\hat{Y}$.

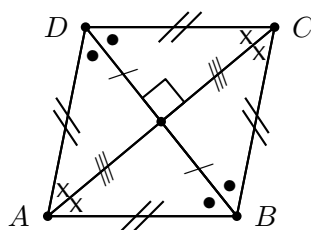
Ons kan dus aflei die diagonale halveer die teenoorstaande hoeke.

Om te bewys dat 'n parallelogram 'n ruit is, moet ons enigeen van die volgende toon:

- Alle sye is ewe lank.
- Die diagonale halveer mekaar met hoeke van 90° .
- Diagonale halveer beide pare teenoorstaande hoeke.

Opsomming van die eienskappe van 'n ruit:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Al vier sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Die diagonale halveer mekaar met hoeke van 90° .
- Diagonale halveer die teenoorstaande hoeke.



Vierkant



DEFINISIE: Vierkant

'n Vierkant is 'n rombus met al vier hoeke gelyk aan 90° .

OF

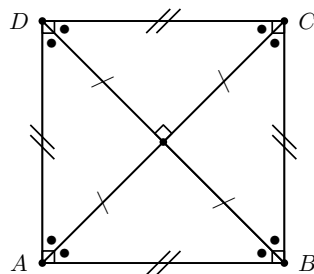
'n Vierkant is 'n reghoek met al vier sye ewe lank.

'n Vierkant is 'n vierhoek met al die eienskappe van 'n ruit:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Alle sye is ewe lank.
- Die diagonale halveer mekaar met hoeke van 90° .
- Diagonale halveer beide pare teenoorstaande hoeke.

Dit het ook die volgende spesiale eienskappe:

- Alle binnehoeke is 90° .
- Die diagonale is ewe lank.
- Diagonale halveer beide pare teenoorstaande hoeke (d.w.s. hulle is almal 45°).



Om te bewys 'n parallelogram is 'n vierkant, moet ons een van die volgende bewys:

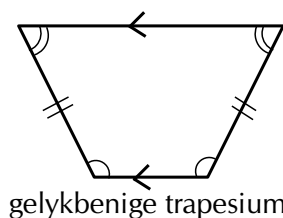
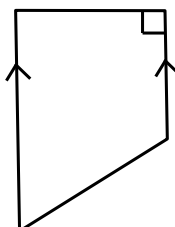
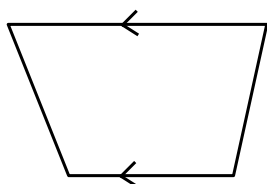
- dat dit 'n ruit is met binnehoeke van 90° .
- dat die 'n reghoek is met al vier sye ewe lank.

Trapecium



DEFINISIE: Trapecium

'n Trapecium is 'n vierhoek met een paar teenoorstaande sye ewewydig.



gelykbenige trapesium

Vlieër



DEFINISIE: Vlieër

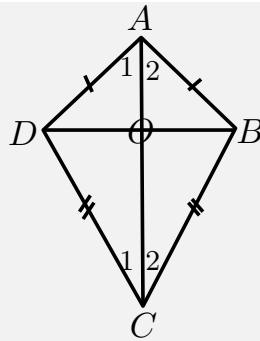
'n Vlieër is 'n vierhoek met twee paar aangrensende sye ewe lank.

Voorbeeld 7: Eienskappe van 'n vlieër

PROBLEEM

$ABCD$ is 'n vlieër met $AD = AB$ en $CD = CB$. Bewys dat:

1. $\hat{ADC} = \hat{ABC}$
2. Hoeklyne AC halveer $\hat{A}$ en $\hat{C}$

**OPLOSSING**

Stap 1 : **Bewys** $\triangle ADC \equiv \triangle ABC$

In $\triangle ADC$ en $\triangle ABC$,

$$AD = AB \quad (\text{gegee})$$

$$CD = CB \quad (\text{gegee})$$

AC is 'n gemene sy

$$\therefore \triangle ADC \equiv \triangle ABC \quad (\text{SSS})$$

$$\therefore \hat{ADC} = \hat{ABC}$$

Dus is een paar teenoorstaande binnehoeke van vlieër $ABCD$ ewe lank .

Stap 2 : **Gebruik kongruente driehoeke om te bewys** AC **halveer** $\hat{A}$ en $\hat{C}$

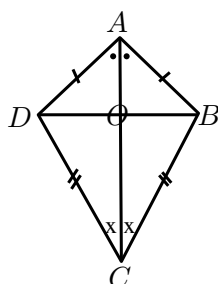
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad (\triangle ADC \equiv \triangle ABC)$$

$$\text{en } \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \quad (\triangle ADC \equiv \triangle ABC)$$

Dus halveer hoeklyn AC $\hat{A}$ en $\hat{C}$.

Ons kan tot die gevolgtrekking kom dat die hoeklyn tussen gelyke sye van 'n vlieër 'n as van simmetrie is en die binnehoeke van die vlieër halveer.

Opsomming van die eienskappe van 'n vlieër:

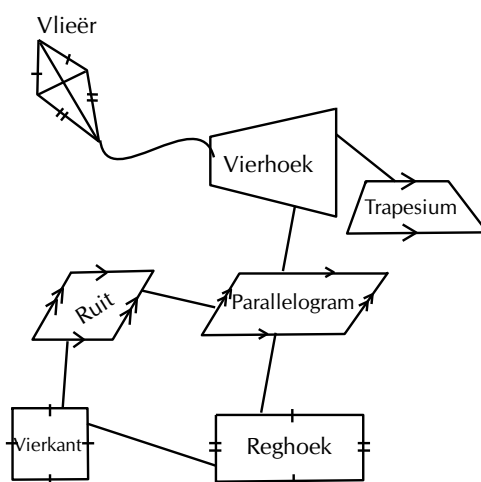


- Diagonaal tussen gelyke sye halveer die ander diagonaal.
- Een paar teenoorstaande hoeke (die hoeke tussen die ongelyke sye) is ewe groot.
- Diagonaal tussen gelyke sye halveer die binnehoeke en is 'n simmetriese as.
- Hoeklyne sny mekaar reghoekig (90°).

Onderzoek:

Verhoudings tussen die verskillende vierhoeke

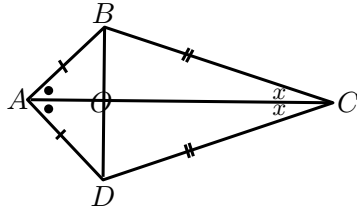
Heather het die volgende diagram getrek om haar begrip van die verhouding tussen die verskillende vierhoeke te illustreer. Die volgende diagram gee 'n opsomming van die verskillende tipes van spesiale vierhoeke.



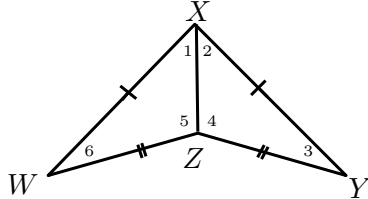
1. Verduidelik haar moontlike redes vir die strukturering van die diagram, soos getoon.
2. Ontwerp jou eie diagram om die verhoudings tussen die verskillende vierhoeke te toon en skryf 'n kort verduideliking van jou ontwerp.

Oefening 11 - 5

1. Gebruik die skets van vierhoek $ABCD$ om te bewys dat die hoeklyne is loodreg op mekaar.



2. Verduidelik waarom $WXYZ$ 'n vlieër is. Skryf al die eienskappe van vierhoek $WXYZ$ neer.



A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

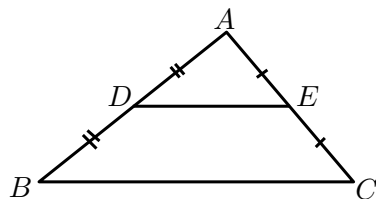
(1.) 02ng (2.) 02nh

11.2 Die middelpuntstelling

EMDEL

Onderzoek:

Bewys die middelpuntstelling



1. Trek 'n groot ongelyksydige driehoek op 'n vel papier.
2. Noem die hoekpunte A , B en C . Vind middelpunte, D en E , van twee sye

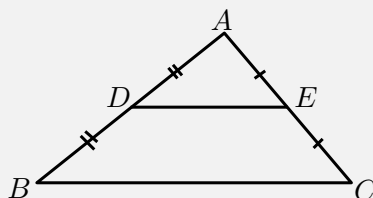
en verbind hulle.

3. Sny $\triangle ABC$ uit en sny langs lyn DE .
4. Plaas $\triangle ADE$ op vierhoek $BDCE$ met hoekpunt E op hoekpunt C en DE op BC . Skryf jou waarnemings neer.
5. Skuif $\triangle ADE$ om hoekpunt D op hoekpunt B te plaas. Skryf jou waarnemings neer.
6. Wat let jy op omtrent die lengtes van DE en BC ?
7. Formuleer 'n vermoede in verband met die lyn wat die middelpunt van twee sye van 'n driehoek verbind.

Voorbeeld 8: Middelpuntstelling

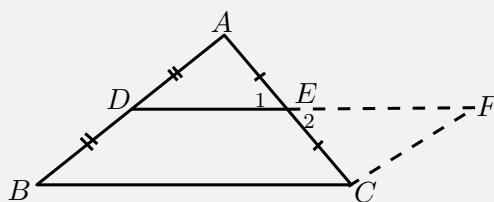
PROBLEEM

Bewys dat die lyn wat die middelpunt van twee sye van 'n driehoek verbind ewewydig is aan die derde sy en gelyk is aan die helfte van die lengte van die derde sy.



OPLOSSING

Stap 1 : **Verleng DE na F sodat $DE = EF$ en verbind FC**



Stap 2 : **Bewys $BCFD$ is 'n parallelogram**

In $\triangle EAD$ en $\triangle ECF$,

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \quad (\text{regoorstaande } \angle\text{'e})$$

$$AE = CE \quad (\text{gegee})$$

$$DE = EF \quad (\text{konstruksie})$$

$$\triangle EAD \equiv \triangle ECF \quad (\text{SHS})$$

$$\therefore \hat{A}DE = \hat{C}FE$$

maar hulle is verwisselende binnehoeke, dus $BD \parallel FC$

$$BD = DA \quad (\text{gegee})$$

$$DA = FC \quad (\triangle EAD \equiv \triangle ECF)$$

$$\therefore BD = FC$$

$\therefore BCFD$ is 'n parallelogram (een paar teenoorstaande sye = en $\parallel$)

Dus $DE \parallel BC$.

Ons kom tot die gevolgtrekking dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig is aan die derde sy.

Stap 3 : Gebruik eienskappe van parallelogram $BCFD$ om te bewys dat $DE = \frac{1}{2}BC$

$$DF = BC \quad (\text{teenoorstaande sye})$$

$$\text{en } DF = 2(DE) \quad (\text{konstruksie})$$

$$\therefore 2DE = BC$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$$

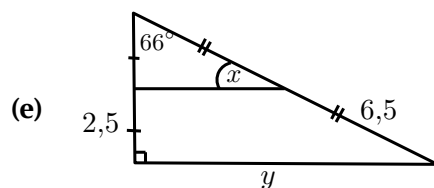
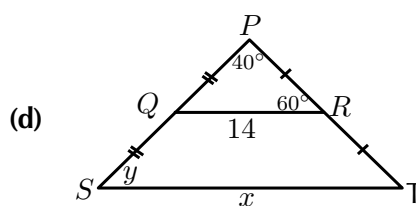
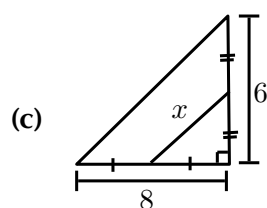
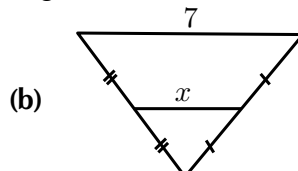
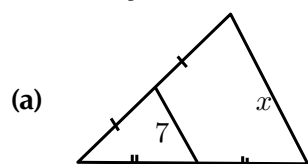
Ons maak die gevolgtrekking dat die lyn wat die middelpunt van twee sye van 'n driehoek verbind gelyk is aan die helfde van die lengte van die derde sy.

Omgekeerde

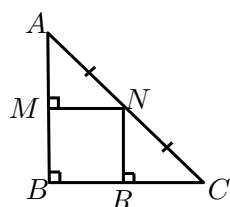
Die omgekeerde stelling: 'n lyn deur die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan 'n tweede sy, halveer die derde sy.

Oefening 11 - 6

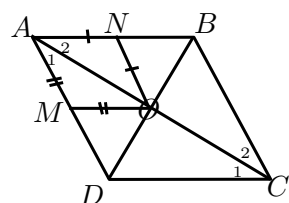
1. Vind x en y in elk van die volgende:



2. Wys dat M die middelpunt is van AB en dat $MN = RC$.



3. $ABCD$ is 'n ruit met $AM = MO$ en $AN = NO$. Bewys $ANOM$ is ook 'n ruit.



Meer oefening video oplossings of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02ni (2.) 02nj (3.) 02nk

Bewyse en vermoedens



Jy kan meetkunde en die eienskappe van poligone gebruik om die onbekende lengtes en hoeke in vierhoeke en driehoeke te vind.

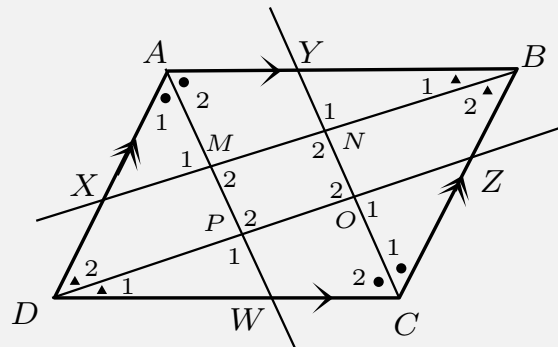
▶ Video: VMckg by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 9: Bewys dat 'n vierhoek 'n parallelogram is

PROBLEEM

In parallelogram $ABCD$, is die halveerlyne (AW , BX , CY en DZ) van die hoeke, gekonstrueer. Jy word ook gegee $AB = CD$, $AD = BC$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\hat{A} = \hat{C}$, en $\hat{B} = \hat{D}$.

Bewys dat $MNOP$ 'n parallelogram is.



OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik die eienskappe van parallelogram $ABCD$ en merk al die gelyke hoeke en sye op die diagram**

Stap 2 : **Bewys $\hat{M}_2 = \hat{O}_2$**
In $\triangle CDZ$ en $\triangle ABX$,

$$\hat{D}\hat{C}Z = \hat{B}\hat{A}X \quad (\text{gegeë})$$

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_1 \quad (\text{gegeë})$$

$$DC = AB \quad (\text{gegeë})$$

$$\therefore \triangle CDZ \equiv \triangle ABX \quad (\text{HHS})$$

$$\therefore CZ = AX \quad \text{en } \hat{C}\hat{Z}D$$

$$= \hat{A}\hat{X}B$$

In $\triangle XAM$ en $\triangle ZCO$,

$$\hat{X}\hat{A}M = \hat{Z}\hat{C}O \quad (\text{gegeë: } \triangle CDZ \equiv \triangle ABX)$$

$$\hat{A}\hat{X}M = \hat{C}\hat{Z}O \quad (\text{bewys})$$

$$AX = CZ \quad (\text{bewys})$$

$$\therefore \triangle XAM \equiv \triangle ZCO \quad (\text{HHS})$$

$$\therefore \hat{M}_1 = \hat{O}_1$$

$$\text{maar } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (\text{regoorst. } \angle'e)$$

$$\text{en } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{regoorst. } \angle'e)$$

$$\therefore \hat{M}_2 = \hat{O}_2$$

Stap 3 : **Net so, kan ons aantoon** $\hat{N}_2 = \hat{P}_2$

Eerstens, bewys $\triangle ADW \equiv \triangle CBY$. Bewys dan $\triangle PDW \equiv \triangle NBY$.

Stap 4 : **Gevolgtrekking**

Beide pare teenoorstaande hoeke in $MNOP$ is gelyk. Dus is $MNOP$ 'n parallelogram.

Hoofstuk 11 | Opsomming

📌 Opsommingsaanbieding: VMdml by www.everythingmaths.co.za

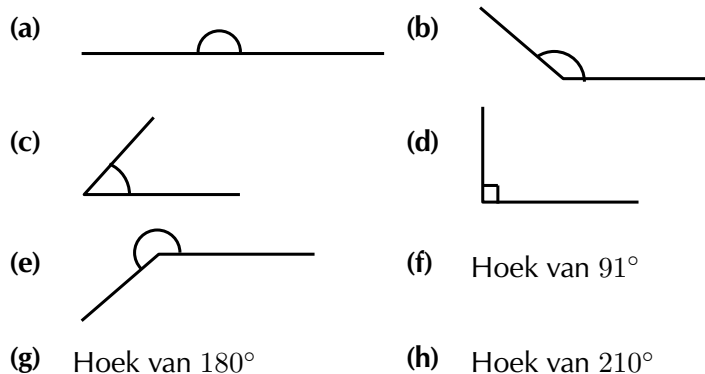
- 'n Vierhoek is 'n geslote viersydige figuur.
- 'n Vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig, word 'n parallelogram genoem.
 - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig
 - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
 - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
 - Die hoeklyne/diagonale halveer mekaar (d.w.s. hulle sny mekaar in die helfte).
- 'n Reghoek is 'n parallelogram met al vier hoeke ewe groot en gelyk aan 90° .
 - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
 - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
 - Die hoeklyne/diagonale halveer mekaar (d.w.s. hulle sny mekaar in die helfte).
 - Die hoeklyne is ewe lank.
 - Alle hoek is regte hoeke van 90° .
- 'n Ruit (rombus) is 'n parallelogram waarvan al vier sye ewe lank is.
 - Beide pare teenoorstaande sye is parallel.
 - Al vier sye is ewe lank.
 - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
 - Beide hoeklyne/diagonale halveer mekaar met 90° .
 - Diagonale halveer die teenoorstaande hoeke.
- 'n Vierkant is 'n rombus met al vier sye ewe lank en al vier hoeke gelyk aan 90° .
 - Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
 - Al vier die hoeke is 90° .
 - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
 - Die hoeklyne halveer mekaar met hoeke van 90° .
 - Hoeke is ewe groot.
 - Hoeke halveer beide pare teenoorstaande hoeke (d.w.s. hulle is almal 45°).
- A Trapezium is 'n vierhoek met slegs een paar teenoorstaande sye ewewydig.
- 'n Vlieër is 'n vierhoek met twee pare aangrensende sye ewe lank.
 - Een paar teenoorstaande hoeke (die hoeke tussen die ongelyke sye) is ewe groot.

- Die hoeklyn tussen die gelyke sye halveer die ander hoeklyn.
- Een hoeklyn halveer die ander een en hierdie hoeklyn halveer ook een paar teenoorstaande hoeke.
- Hoeklyne sny mekaar reghoekig met 90° .
- Die middelpuntstelling: die lyn wat die middelpunt van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfe van die lengte van die derde sy.

Hoofstuk 11

Einde van Hoofstuk Oefeninge

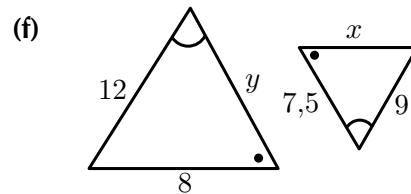
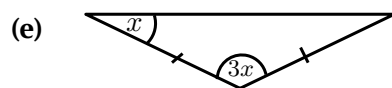
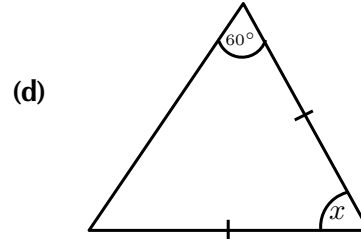
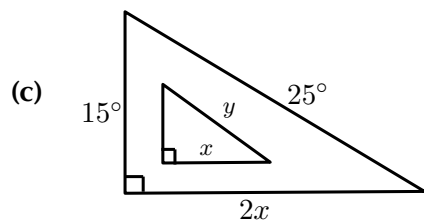
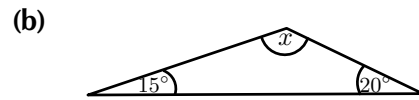
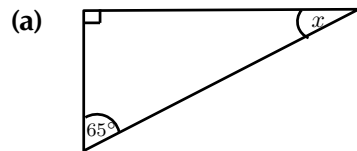
1. Identifiseer die soort hoek in elk van die volgende gevalle:



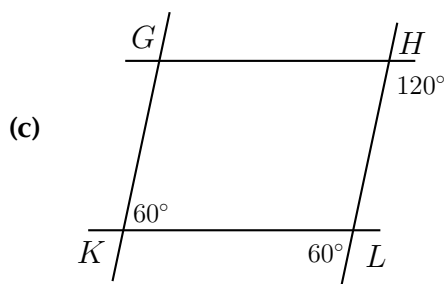
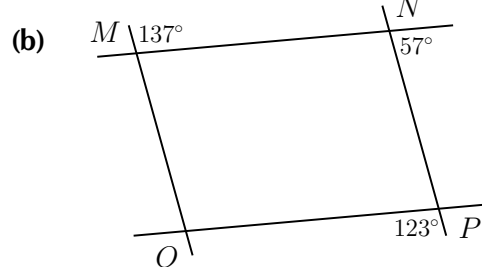
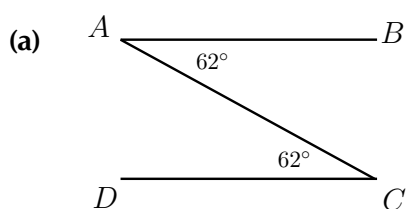
2. Bepaal of die volgende stellings waar of vals is. Indien die stelling vals is, verduidelik hoekom:

- (a) 'n Trapesium is 'n vierhoek met twee pare teenoorstaande sye ewewydig.
- (b) Beide hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar.
- (c) 'n Reghoek is 'n parallelogram waarvan al vier die hoek hoeke ewe groot (90°).
- (d) Twee aangrensende sye van 'n ruit het verskillende lengtes.
- (e) Die hoeklyn van 'n vlieër sny mekaar loodreg.
- (f) Alle vierkante is parallelogramme.
- (g) 'n Ruit is 'n vlieër met 'n paar gelyke teenoorstaande sye.
- (h) Die vier sye van 'n ruit het verskillende lengtes.
- (i) Die hoeklyne van 'n vlieër sny mekaar teen 'n regte hoek.

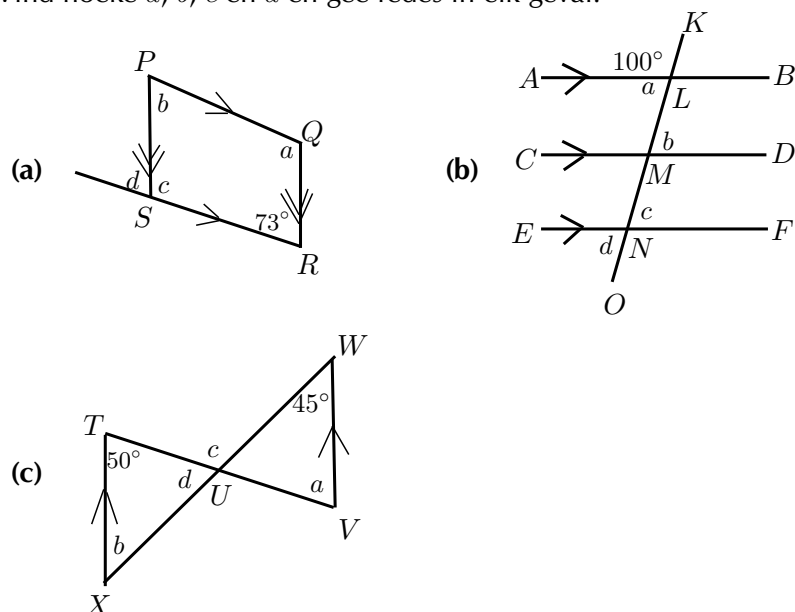
3. Bereken die grootte van x en van y in elk van die volgende gevalle:



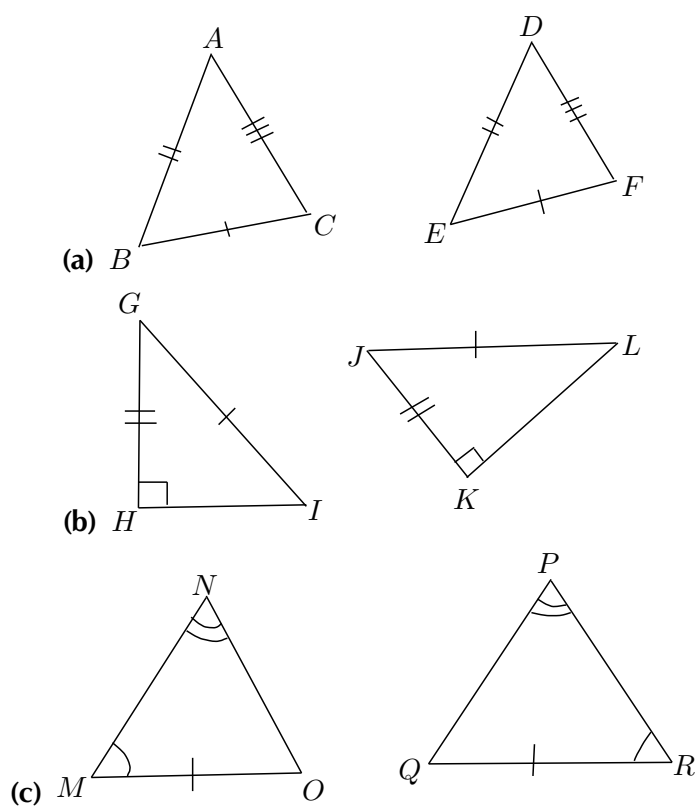
4. Identifiseer al die pare ewewydig lyne in die volgende figure en gee redes in elke geval.

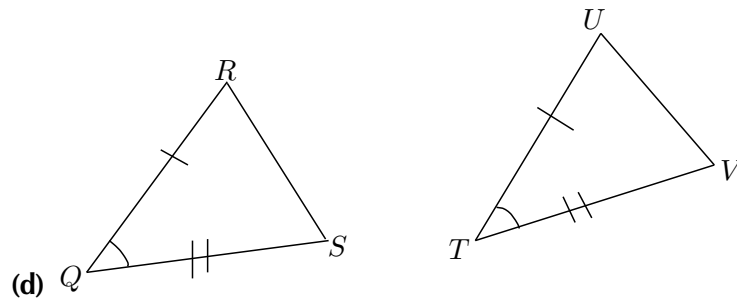


5. Vind hoeke a , b , c en d en gee redes in elk geval:

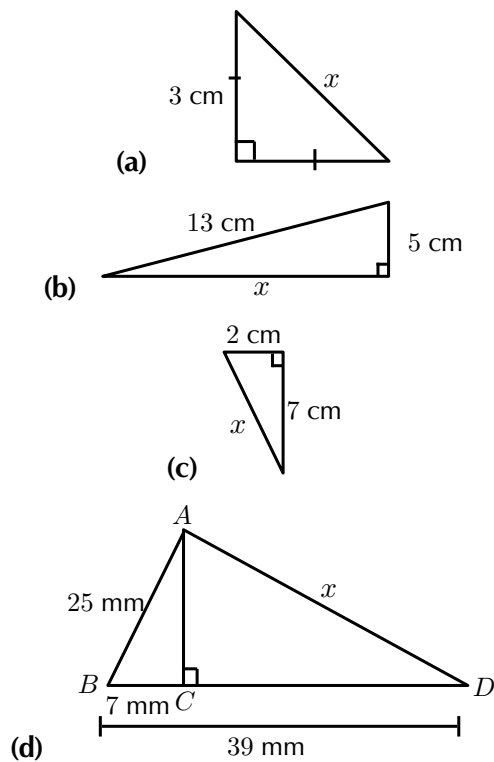


6. Identifiseer watter van die volgende pare driehoeke kongruent is en gee redes.

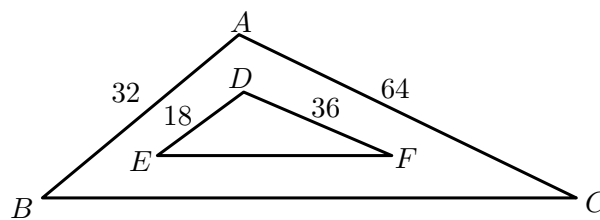




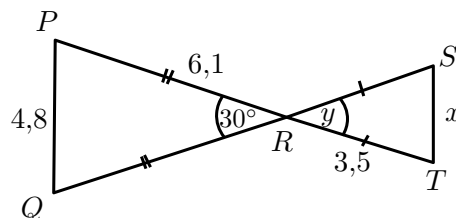
7. Bepaal met behulp van Pythagoras se stelling vir reghoekige driehoeke die lengte van x :



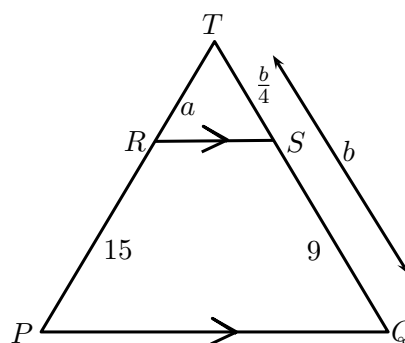
8. Beskou die diagram hieronder. Is $\triangle ABC \parallel \triangle DEF$? Gee redes vir jou antwoord.



9. Verduidelik waarom $\triangle PQR$ gelykvormig is aan $\triangle TRS$ en bereken die waardes van x en y .



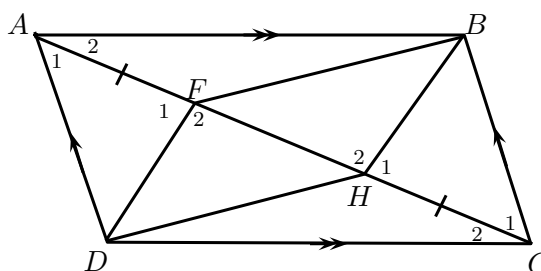
10. Bereken a en b :



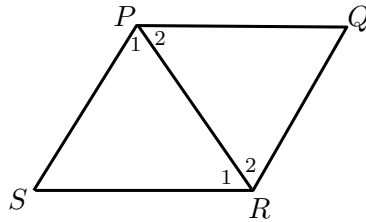
11. $ABCD$ is 'n parallelogram met hoeklyn AC .

As dit gegee word dat $AF = HC$, toon dat:

- (a) $\triangle AFD \equiv \triangle CHB$
- (b) $DF \parallel HB$
- (c) $DFBH$ is 'n parallelogram

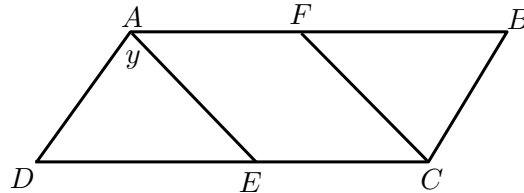


12. $\triangle PQR$ en $\triangle PSR$ is gelyksydige driehoeke. Bewys dat $PQRS$ 'n ruit is:



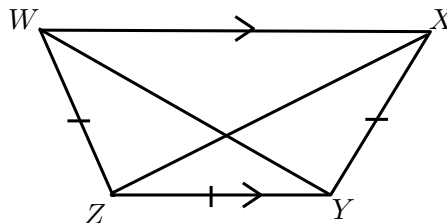
13. Gegee parallelogram $ABCD$ met AE wat $\hat{A}$ halveer en FC wat $\hat{C}$ halveer.

- (a) Druk al die binnehoeke uit in terme van y .
 (b) Bewys $AFCE$ is 'n parallelogram.



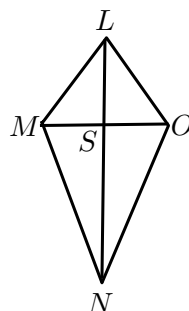
14. Gegee $WZ = ZY = YX$, $\hat{W} = \hat{X}$ en $WX \parallel ZY$, bewys dat:

- (a) XZ halveer $\hat{X}$
 (b) $WY = XZ$

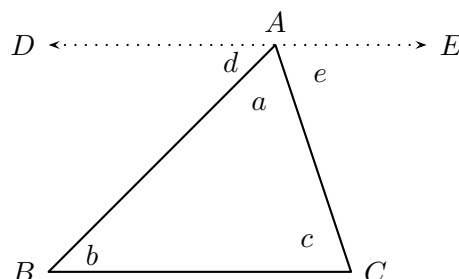


15. $LMNO$ is 'n vierhoek met $LM = LO$ en hoeklyne wat sny by S sodat $MS = SO$. Bewys dat:

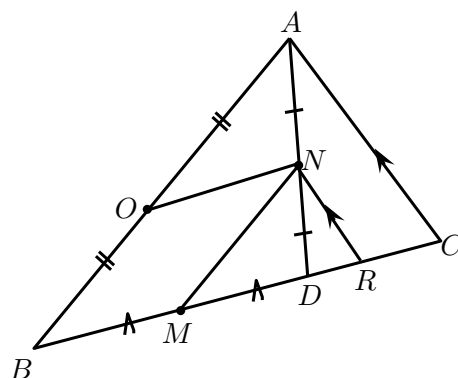
- (a) $\hat{MLS} = \hat{SLO}$
 (b) $\triangle LON \equiv \triangle LMN$
 (c) $MO \perp LN$



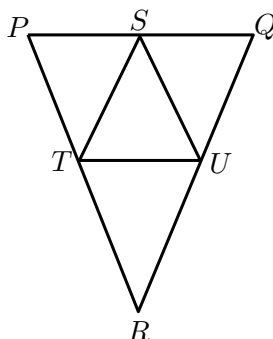
16. Gebruik die figuur hieronder en bewys dat die som van die hoeke van 'n driehoek gelyk is aan 180° . Lyn DE is ewewydig aan BC .



17. D is 'n punt op BC , in $\triangle ABC$. N is die middelpunt van AD . O is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BD . $NR \parallel AC$.

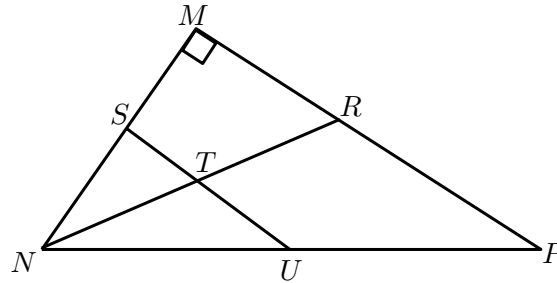


- (a) Bewys dat $OBMN$ 'n parallelogram is.
 (b) Bewys dat $BC = 2MR$.
18. PQR is 'n gelykbenige driehoek met $PR = QR$. S is die middelpunt van PQ , T is die middelpunt van PR en U is die middelpunt van RQ .



- (a) Bewys dat $\triangle STU$ ook gelykbenig is.
 (b) Watter soort vierhoek is $STRU$? Motiveer jou antwoord.
 (c) As $\hat{RTU} = 68^\circ$ bereken, met redes, die grootte van $\hat{T\hat{S}U}$.

19. In $\triangle MNP$, $M = 90^\circ$, S is die middelpunt van MN en T is die middelpunt van NR .



- (a) Bewys dat U die middelpunt van NP is.
 (b) As $ST = 4$ cm en die area van $\triangle SNT$ 6 cm^2 is, bereken die area van $\triangle MNR$.
 (c) Bewys dat die area van $\triangle MNR$ sal altyd vier keer so groot as die area van $\triangle SNT$ wees. Gestel $ST = x$ eenhede en $SN = y$ eenhede.

A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

- (1.) 02nm (2.) 02nn (3.) 02np (4.) 02nq (5.) 02nr (6.) 02ns
 (7.) 02nt (8.) 02nu (9.) 02nv (10.) 02nw (11.) 02nx (12.) 02ny
 (13.) 02nz (14.) 02p0 (15.) 02p1 (16.) 02p2 (17.) 02tb (18.) 02tc
 (19.) 02td

Hierdie hoofstuk ondersoek die buite-oppervlaktes en volumes van die drie-dimensionele voorwerpe, bekend as vaste liggame. Om hiermee te werk, moet jy weet hoe om die oppervlaktes en omtrekke van twee-dimensionele voorwerpe te bereken.

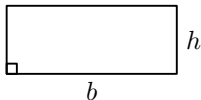
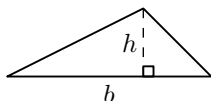
📺 Video: VMcmk by www.everythingmaths.co.za

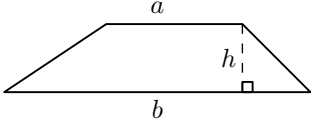
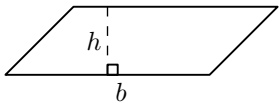
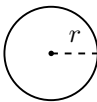
12.1 Oppervlaktes van veelhoeke

EMDEN

DEFINISIE: Oppervlakte

Oppervlakte of area is 'n twee-dimensionele ruimte binne die grense van 'n plat voorwerp. Dit word gemeet in vierkante eenhede.

Naam	Vorm	Formule
Vierkant		Oppervlakte = s^2
Reghoek		Oppervlakte = $b \times h$
Driehoek		Oppervlakte = $\frac{1}{2}b \times h$

Naam	Vorm	Formule
Trapecium		Oppervlakte = $\frac{1}{2}(a + b) \times h$
Parallelogram		Oppervlakte = $b \times h$
Sirkel		Oppervlakte = πr^2 (Omtrek = $2\pi r$)

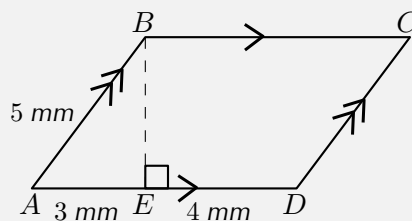
▶ Video: VMdxu by www.everythingmaths.co.za

▶ Video: VMdya by www.everythingmaths.co.za

Voorbeeld 1: Bepaling van die oppervlakte van 'n veelhoek

PROBLEEM

Vind die oppervlakte van die volgende parallelogram:



OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik die stelling van Pythagoras om die loodregte hoogte BE**

van die parallellogram te vind

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= BE^2 + AE^2 \\
 \therefore BE^2 &= AB^2 - AE^2 \\
 &= 5^2 - 3^2 \\
 &= 16 \\
 \therefore BE &= 4 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

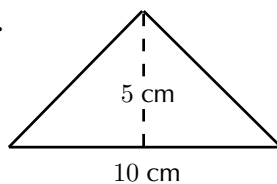
Stap 2 : Gebruik die formule vir 'n parallellogram om die oppervlakte van die parallellogram te vind

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte} &= b \times h \\
 &= AD \times BE \\
 &= 7 \times 4 \\
 &= 28 \text{ mm}^2
 \end{aligned}$$

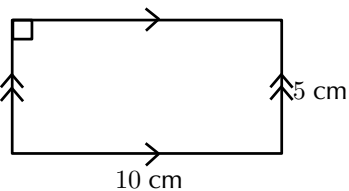
Oefening 12 - 1

Vind die oppervlakte vir elk van die gegewe figure:

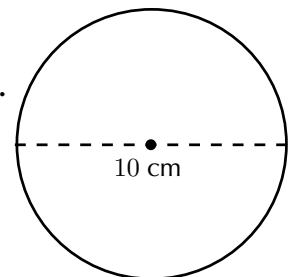
1.

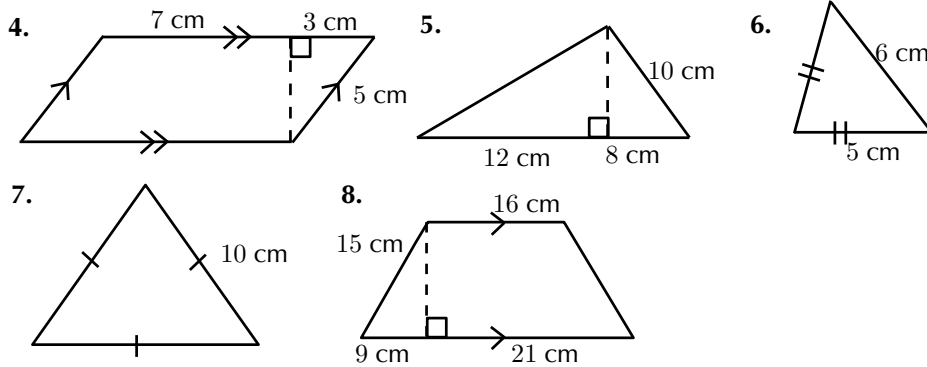


2.



3.





ⓐ Meer oefening ▶ video oplossings ❓ of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02p3 (2.) 02p4 (3.) 02p5 (4.) 02p6 (5.) 02p7 (6.) 02p8

(7.) 02p9 (8.) 02pa

12.2 Regte prisma's en silinders

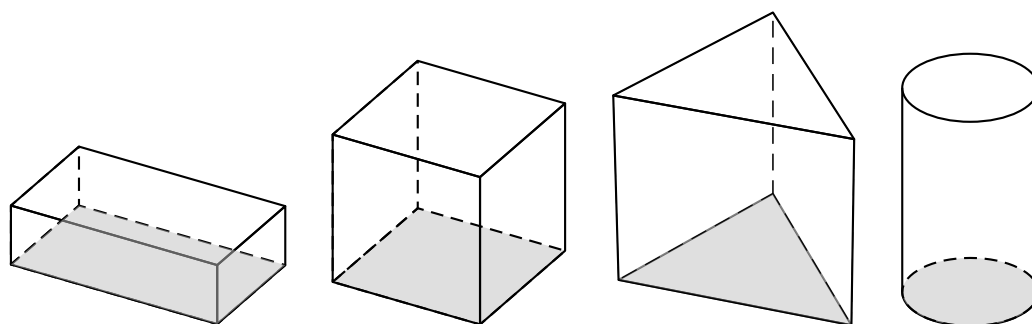
EMDEO

DEFINISIE: Regte prisma

'n Regte prisma is 'n geometriese vaste liggaam met 'n veelhoek as basis en een of meer sye loodreg op die basis. Die basis en die boonste vlak het dieselfde grootte en vorm en hulle is ewewydig aan mekaar. Dit word genoem 'n regte prisma omdat die hoeke tussen die basis en die sye regte hoeke is.

'n Driehoekige prisma het 'n driehoek as sy basis, 'n reghoekige prisma het 'n reghoek as sy voetstuk, en 'n kubus is 'n reghoekige prisma waarin al die sye van gelyke lengte is. 'n Silinder is 'n ander tipe regte prisma wat 'n sirkel as sy basis het. Voorbeelde van regte prisma's word hieronder gegee: 'n reghoekige prisma, 'n kubus, 'n driehoekige prisma en 'n silinder.

▶ Video: VMcpb by www.everythingmaths.co.za



Buite-oppervlaktes van prisma's en silinders



DEFINISIE: Buite-oppervlakte

Die term buite-oppervlakte verwys na die totale oppervlakte aan die buitekant van die prisma.

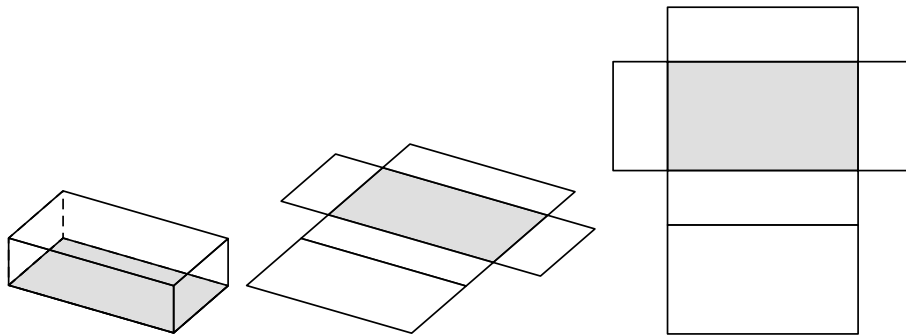
Dit is makliker om te verstaan as 'n mens aan die prisma dink as 'n soliede voorwerp. 'n Soliede voorwerp wat oopgevou word, word 'n ontvouing genoem. Wanneer 'n prisma ontvou word, kan ons elke vlak duidelik sien. Om die buite-oppervlakte van die prisma te bereken, bereken ons eenvoudig die oppervlakte van elke vlak en tel hulle almal bymekaar.

Byvoorbeeld, die driehoekige prisma het twee syvlakke wat driehoekig is en drie syvlakke wat reghoekig is. Om die buite-oppervlakte van 'n driehoekige prisma te bereken moet die oppervlak van al vyf syvlakke bereken en bymekaar getel word.

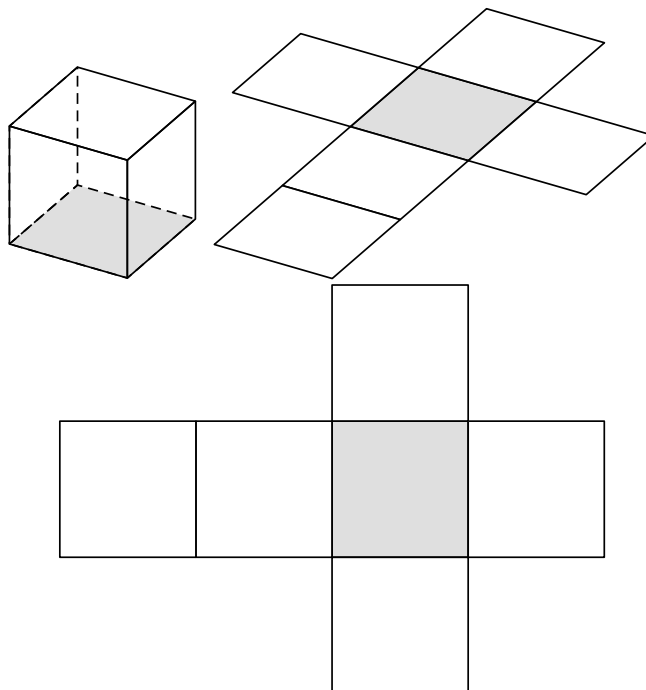
'n Silinder bestaan uit twee sirkelvormige syvlakke en 'n reghoekige kolom met 'n lengte wat gelyk is aan die omtrek van die sirkelvormige basis. Om die buite-oppervlakte te bereken, vind ons die oppervlakte van die twee sirkels en van die reghoek en tel hulle bymekaar.

► Video: VMcre by www.everythingmaths.co.za

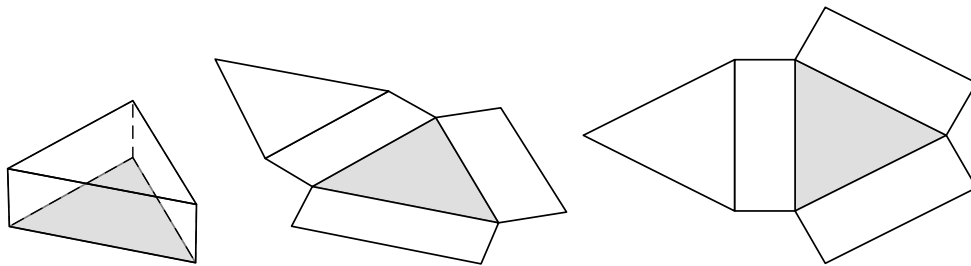
Onder is voorbeelde van regte prisma's wat ontvou is:

Reghoekige prisma

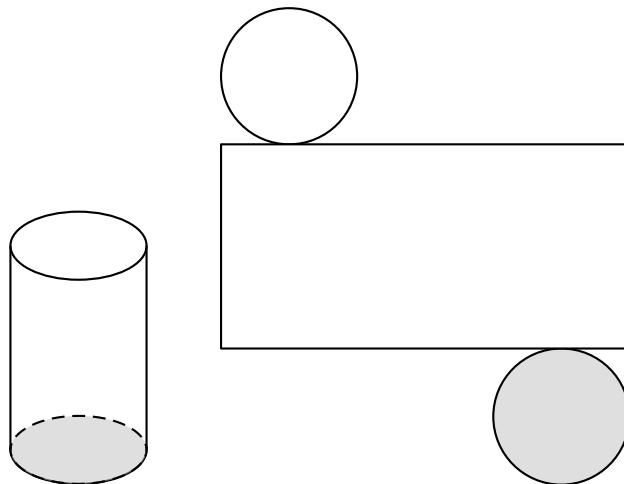
'n Reghoekige prisma wat ontvou is, bestaan uit ses reghoeke.

Kubus

'n Kubus wat ontvou is, bestaan uit ses identiese vierkante. 'n Kubus is dus 'n vierkantige prisma wat uit ses ewe groot vierkante bestaan.

Driehoekige prisma

Die ontvouing van 'n driehoekige prisma bestaan uit twee identiese driehoeke en een reghoek, wat weer bestaan uit drie reghoeke met dieselfde hoogte.

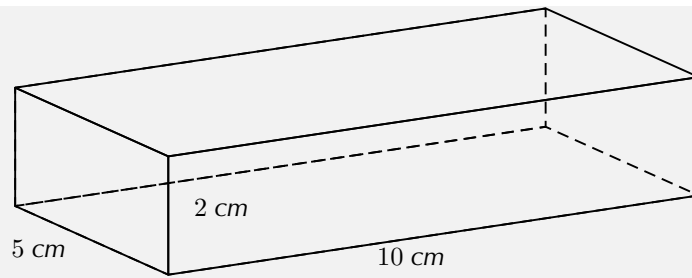
Silinder

'n Silinder wat ontvou word, bestaan uit twee identiese sirkels en 'n reghoek waarvan die lengte gelyk is aan die omtrek van die sirkels.

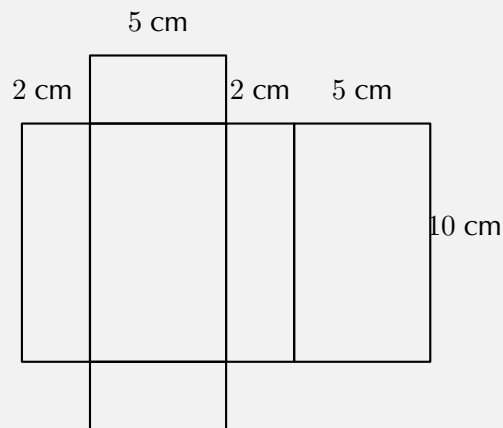
Voorbeeld 2: Berekening van die buite-oppervlakte van 'n reghoekige prisma

PROBLEEM

Bereken die buite-oppervlakte van die volgende reghoekige prisma:

**OPLOSSING**

Stap 1 : Skets die ontvouing van die prisma en skryf die sylengtes neer



Stap 2 : Vind die oppervlaktes van die verskillende vorme in die ontvouing

$$\begin{aligned}
 \text{Groot reghoek} &= \text{omtrek van kleiner reghoek} \times \text{lengte} \\
 &= (2 + 5 + 2 + 5) \times 10 \\
 &= 14 \times 10 \\
 &= 140 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \times \text{kleiner reghoek} &= 2(5 \times 2) \\
 &= 2(10) \\
 &= 20 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 3 : Vind die som van die oppervlaktes van die vlakke

$$\text{groot reghoek} + 2 \times \text{klein reghoek} = 140 + 20 = 160 \text{ cm}^2.$$

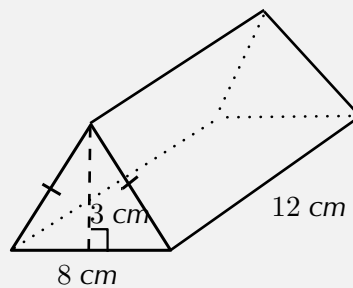
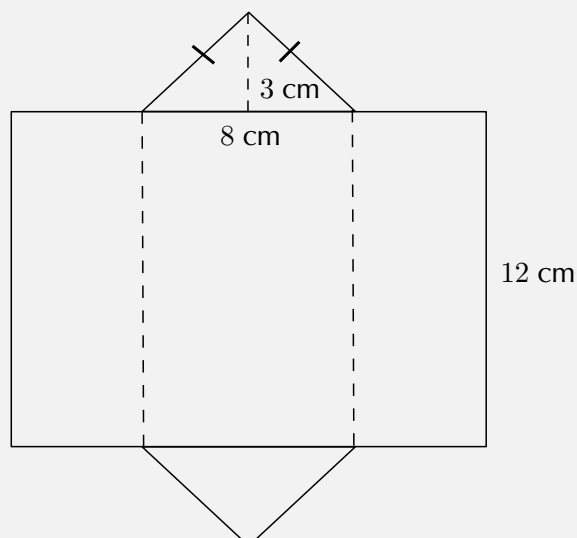
Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die reghoekige prisma is 160 cm^2 .

Voorbeeld 3: Berekening van die buite-oppervlakte van 'n driehoekige prisma

PROBLEEM

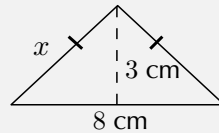
Vind die buite-oppervlakte van die volgende driehoekige prisma:

**OPLOSSING****Stap 1 : Skets en benoem die ontvouing van die prisma**

Stap 2 : Vind die oppervlaktes van verskillende vorme in die ontvouing

Om die oppervlakte van 'n reghoek te bereken, moet ons sy lengte vind. Dit is gelyk aan die omtrek van die driehoeke.

Gebruik Pythagoras om die hoogte van die driehoekige vlak te bereken:



$$x^2 = 3^2 + \frac{8^2}{4}$$

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$= 25$$

$$\therefore x = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Omtrek van driehoek} = 5 + 5 + 8$$

$$= 18 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Oppervlakte van groot driehoek} = \text{omtrek van driehoek} \times \text{lengte}$$

$$= 18 \times 12$$

$$= 216 \text{ cm}^2$$

$$\text{Oppervlakte van driehoek} = \frac{1}{2}b \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$$

$$= 12 \text{ cm}^2$$

Stap 3 : Vind die som van die oppervlaktes van die vlakke

$$\text{Buite-oppervlakte} = \text{oppervlakte groot reghoek} + (2 \times \text{oppervlakte driehoek})$$

$$= 216 + 2(12)$$

$$= 240 \text{ cm}^2$$

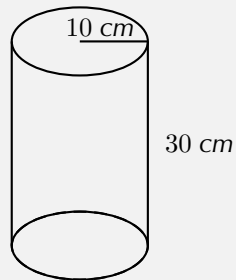
Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die driehoekige prisma is 240 cm^2 .

Voorbeeld 4: Bereken die buite-oppervlakte van 'n silindriese prisma

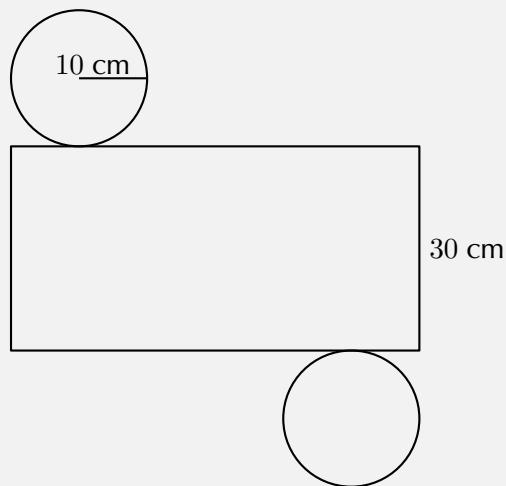
PROBLEEM

Vind die buite-oppervlakte van die volgende silinder (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1 : Skets en benoem die ontvouing van die prisma



Stap 2 : Vind die oppervlakte van die verskillende vorme in die ontvouing

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte van groot reghoek} &= \text{omtrek van sirkel} \times \text{lengte} \\
 &= 2\pi r \times l \\
 &= 2\pi(10) \times 30 \\
 &= 1\,884,96 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2 \\
 &= \pi 10^2 \\
 &= 314,16 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} \\
 &\quad + (2 \times \text{oppervlakte van sirkel}) \\
 &= 1\,884,96 + 2(314,16) \\
 &= 2\,513,3 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

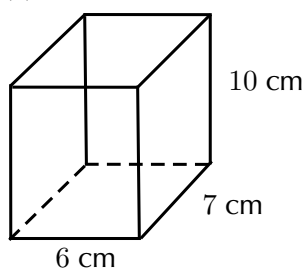
Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

Die buite-oppervlakte van die silinder is $2\,513,3 \text{ cm}^2$.

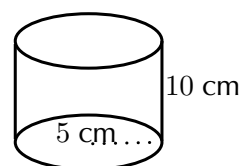
Oefening 12 - 2

1. Bereken die buite-oppervlakte van die volgende prisma's:

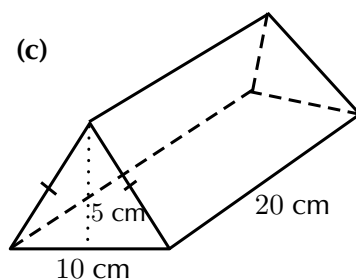
(a)



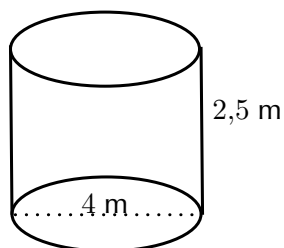
(b)



(c)



2. As 'n liter verf nodig is vir 'n oppervlakte van 2 m^2 , bereken hoeveel verf die verwer nodig het om die volgende oppervlaktes te verf:
- (a) 'n Reghoekige swembad met binnewande en bodem met die volgende afmetings: $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$ (slegs binnewande en vloer).
 - (b) 'n Sirkelvormige opgaardam waarvan die bodem 'n middellyn het van 4 m en met 'n diepte van $2,5 \text{ m}$.



(A+) Meer oefening
 (video) video oplossings
 (?) of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02pb (2.) 02pc

Volume van prisma's en silinders

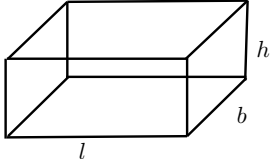
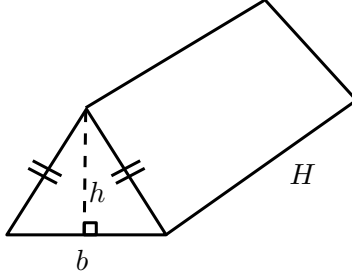
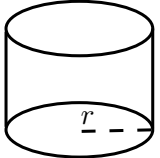


DEFINISIE: Volume

Volume is die drie-dimensionele ruimte wat in beslag geneem word, deur 'n voorwerp, of die inhoud van 'n voorwerp. Dit word gemeet in kubieke eenhede.

Die volume van 'n reghoekige prisma word bereken deur die oppervlakte van die basis met die hoogte te vermenigvuldig.

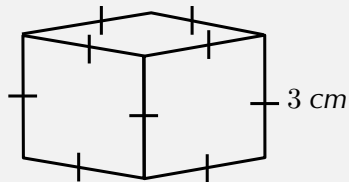
(video) Video: VMcth by www.everythingmaths.co.za

Reghoekige prisma		$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte} \\ &= \text{oppervlakte reghoek} \times \text{hoogte} \\ &= l \times b \times h\end{aligned}$
Driehoekige prisma		$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte} \\ &= \text{oppervlakte driehoek} \times \text{hoogte} \\ &= \left(\frac{1}{2}b \times h\right) \times H\end{aligned}$
Silinder		$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte} \\ &= \text{oppervlakte sirkel} \times \text{hoogte} \\ &= \pi r^2 \times h\end{aligned}$

Voorbeeld 5: Berekening van die volume van 'n kubus

PROBLEEM

Vind die volume van die volgende kubus:


OPLOSSING

Stap 1 : **Vind die oppervlakte van die basis**

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van vierkant} &= s^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2 : Vermenigvuldig die oppervlakte van die basis van die vaste liggaam met die hoogte om die volume te kry

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte van basis} \times \text{hoogte} \\ &= 9 \times 3 \\ &= 27 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

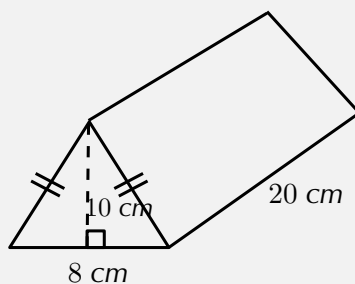
Stap 3 : Skryf die finale antwoord

Die volume van die kubus is 27 cm^3 .

Voorbeeld 6: Berekening van die volume van 'n driehoekige prisma

PROBLEEM

Vind die volume van 'n driehoekige prisma:



OPLOSSING

Stap 1 : Vind die oppervlakte van die basis

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van driehoek} &= \frac{1}{2}b \times h \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 8\right) \times 10 \\ &= 40 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2 : Vermenigvuldig die oppervlakte van die basis met die hoogte van die prisma om die volume te kry

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \text{oppervlakte van die basis} \times \text{hoogte} \\
 &= \frac{1}{2}b \times h \times H \\
 &= 40 \times 20 \\
 &= 800 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

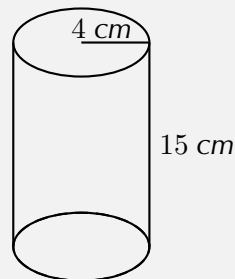
Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

Die volume van 'n driehoekige prisma is 800 cm^3 .

Voorbeeld 7: Berekening van die volume van 'n silindriese prisma

PROBLEEM

Vind die volume van die volgende silinder (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1 : **Vind die oppervlakte van die basis**

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2 \\
 &= \pi(4)^2 \\
 &= 16\pi \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 2 : Vermenigvuldig die oppervlakte van die basis met die hoogte van die prisma om die volume te kry

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \text{oppervlakte van die basis} \times \text{hoogte} \\
 &= \pi r^2 \times h \\
 &= 16\pi \times 15 \\
 &= 754,0 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

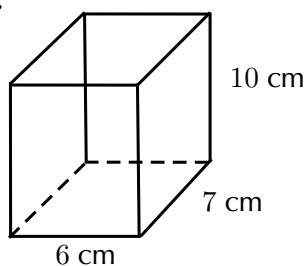
Stap 3 : Skryf die finale antwoord

Die volume van die silinder is $754,0 \text{ cm}^3$.

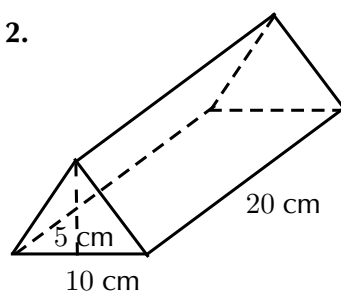
Oefening 12 - 3

Bereken die volume van elkeen van die volgende prisma's (korrek tot 1 desimale plek):

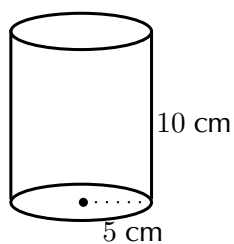
1.



2.



3.



 Meer oefening
  video oplossings
  of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02pd (2.) 02pe (3.) 02pf

12.3 Regte piramides, regte keëls en sfere

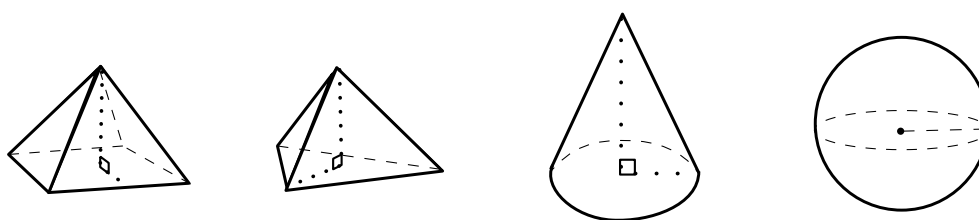
 EMDER

DEFINISIE: Piramide

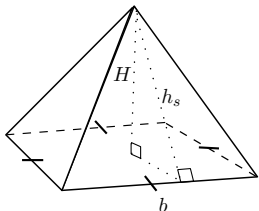
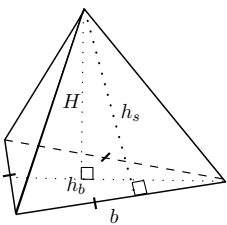
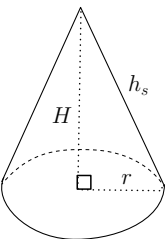
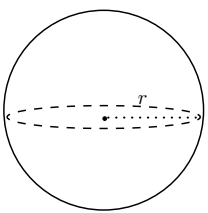
'n Piramide is 'n soliede geometriese figuur met 'n veelhoekbasis wat verbind is aan die toppunt waar die syvlakke ontmoet (met ander woorde die sye is **nie** loodreg op die basis nie).

Die driehoekige piramide en vierkantige piramide neem hulle name van die vorm van die basis. Ons noem 'n piramide 'n 'regte piramide' as die hoogtelyn van die piramide by die tophoek loodreg is op die basis. Keëls is soortgelyk aan piramides behalwe dat hulle basisse sirkels is en nie veelhoeke nie.

Voorbeelde van 'n vierkantige en driehoekige piramides, 'n keël en 'n sfeer:



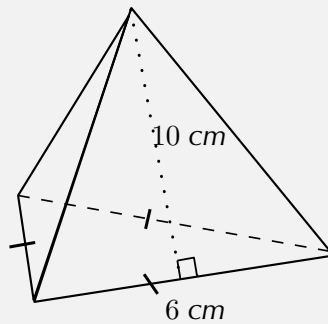
Buite-oppervlaktes van piramides, keëls en EMDES sfeer

Vierkantige piramide		Buite-oppervlakte = oppervlakte basis + oppervlakte driehoekige vlakke $= b^2 + 4 \left(\frac{1}{2} b h_s \right)$ $= b(b + 2h_s)$
Driehoekige piramide		Buite-oppervlakte = oppervlakte basis + oppervlakte driehoekige sye $= \left(\frac{1}{2} b \times h_b \right) + 3 \left(\frac{1}{2} b \times h_s \right)$ $= \frac{1}{2} b (h_b + 3h_s)$
Regte keël		Buite-oppervlakte = oppervlakte basis + oppervlakte syvlak $= \pi r^2 + \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r h_s \right)$ $= \pi r^2 + \pi r h_s$ $= \pi r (r + h_s)$
Sfeer		Buite-oppervlakte = $4\pi r^2$

Voorbeeld 8: Bereken die buite-oppervlakte van 'n driehoekige piramide

PROBLEEM

Vind die buite-oppervlakte van die volgende driehoekige piramide (korrek tot 1 desimale plek):

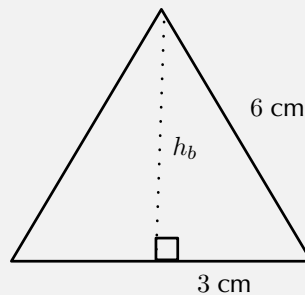


OPLOSSING

Stap 1 : **Vind die oppervlakte van die basis**

$$\text{Oppervlakte van 'n driehoek} = \frac{1}{2}bh_b$$

Gebruik die stelling van Pythagoras om die hoogte van die basis driehoek (h_b) te kry:



$$\begin{aligned}6^2 &= 3^2 + h_b^2 \\ \therefore h_b &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= 3\sqrt{3} \text{ cm} \\ \therefore \text{Oppervlakte van basis driehoek} &= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \\ &= 9\sqrt{3} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2 : Vind die oppervlakte van die syvlakke

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van vlakke} &= 3 \left(\frac{1}{2} \times b \times h_s \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \right) \\ &= 90 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 3 : Vind die som van die oppervlaktes

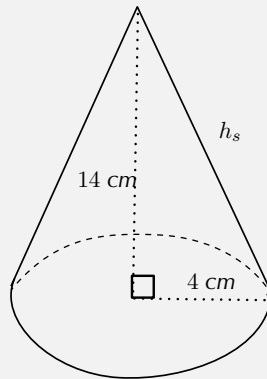
$$9\sqrt{3} + 90 = 105,6 \text{ cm}^2$$

Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die driehoekige piramide is $105,6 \text{ cm}^2$.

Voorbeeld 9: Vind die buite-oppervlakte van 'n keël**PROBLEEM**

Vind die buite-oppervlakte van die volgende keël (korrek tot 1 desimale plek):

**OPLOSSING**

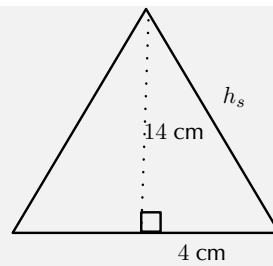
Stap 1 : **Vind die oppervlakte van die basis**

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van basis sirkel} &= \pi r^2 \\ &= \pi 4^2 \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

Stap 2 : **Vind die oppervlakte van die kante**

$$\text{Oppervlakte van kante} = \pi r h_s$$

Gebruik die stelling van Pythagoras om die skuinshoogte, h_s , te vind:



$$\begin{aligned}
 h_s^2 &= 4^2 + 14^2 \\
 \therefore h_s &= \sqrt{4^2 + 14^2} \\
 &= 2\sqrt{53} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte van syvlakke} &= \frac{1}{2} 2\pi r h_s \\
 &= \pi(4)(2\sqrt{53}) \\
 &= 8\pi\sqrt{53} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 3 : Vind die som van die oppervlaktes

$$\begin{aligned}
 \text{Totale buite-oppervlakte} &= 16\pi + 8\pi\sqrt{53} \\
 &= 233,2 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

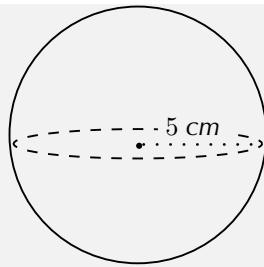
Stap 4 : Skryf die finale antwoord

Die buite-oppervlakte van die driehoekige piramide is $233,2 \text{ cm}^2$.

Voorbeeld 10: Vind die buite-oppervlakte van 'n sfeer

PROBLEEM

Vind die buite-oppervlakte van die volgende sfeer (korrek tot 1 desimale plek):

**OPLOSSING**

Stap 1 : **Gebruik die formule om die buite-oppervlakte te vind**

$$\begin{aligned}
 \text{Buite-oppervlakte van sfeer} &= 4\pi r^2 \\
 &= 4\pi 5^2 \\
 &= 100\pi \\
 &= 314,2 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Skryf die finale antwoord neer**

Die buite-oppervlakte van die sfeer is $314,2 \text{ cm}^2$.

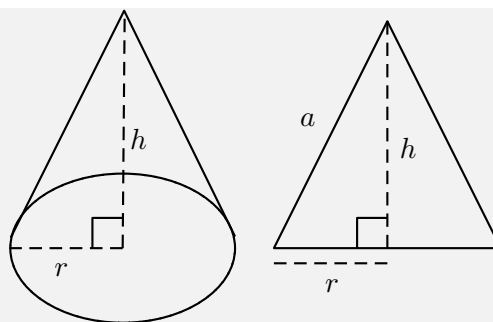
Voorbeeld 11: Ondersoek die buite-oppervlakte van 'n keël

PROBLEEM

As 'n keël 'n hoogte het van h en 'n basis met radius r , toon aan dat die buite-oppervlakte gegee word deur: $\pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

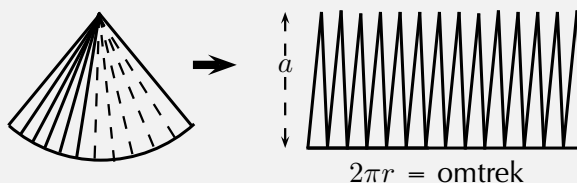
OPLOSSING

Stap 1 : **Skets en benoem die keël**



Stap 2 : Identifiseer die vlakke waaruit die keël bestaan

Die keël het twee vlakke: die basis en die wand. Die basis is 'n sirkel met radius r en die wand kan ontvou word tot 'n sektor van 'n sirkel:



Die geboë vlak kan opgesny word in 'n klomp smal driehoekies waarvan die hoogte, wat byna gelyk is aan a (waar a die skuinshoogte genoem word). Die som van die oppervlaktes van hierdie driehoekies is:

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van sektor} &= \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte (van 'n klein driehoekie)} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times a \\ &= \pi r a\end{aligned}$$

Stap 3 : Bereken a

Bereken a met die stelling van Pythagoras:

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Stap 4 : Bereken die oppervlakte van die sirkelvormige basis (A_b)

$$A_b = \pi r^2$$

Stap 5 : Bereken die oppervlakte van die geboë wand (A_w)

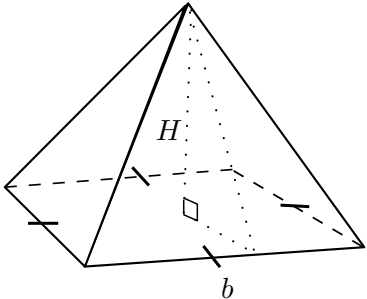
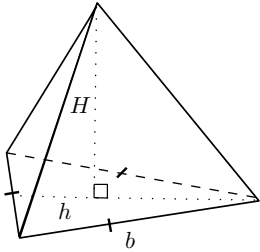
$$\begin{aligned}
 A_w &= \pi r a \\
 &= \pi r \sqrt{r^2 + h^2}
 \end{aligned}$$

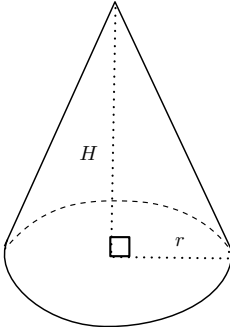
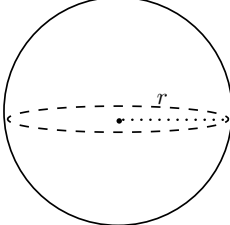
Stap 6 : **Vind die som van die oppervlaktes A**

$$\begin{aligned}
 A &= A_b + A_w \\
 &= \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \\
 &= \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2})
 \end{aligned}$$

Volume van piramides, keëls en sfeer



Vierkantige piramide		$ \begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte basis} \times \\ &\quad \text{hoogte van piramide} \\ &= \frac{1}{3} \times b^2 \times H \end{aligned} $
Driehoekige piramide		$ \begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte basis} \times \\ &\quad \text{hoogte van piramide} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} b h \times H \end{aligned} $

Regte keël		$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte van keël}$ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$
Sfeer		$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2$ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

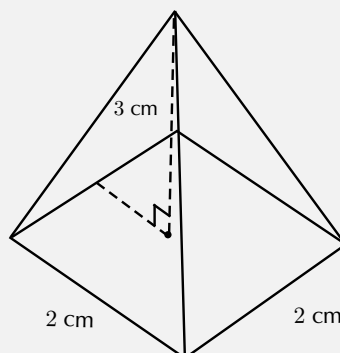
Voorbeeld 12: Berekening van die volume van 'n piramide

PROBLEEM

Bereken die volume van 'n vierkantige piramide, 3 cm hoog met 'n sylengte van 2 cm.

OPLOSSING

Stap 1 : **Skets en benoem die piramide**



Stap 2 : **Gebruik die toepaslike formule en vervang die gegewe waardes**

Die volume van 'n piramide is

$$V = \frac{1}{3} \times b^2 \times H$$

Ons word gegee $b = 2$ en $H = 3$, dus

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 \\ &= \frac{1}{3} \times 12 \\ &= 4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

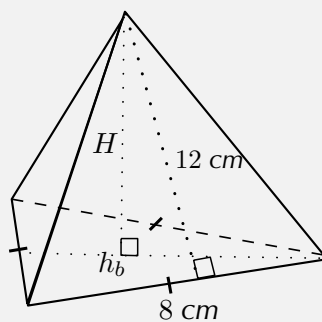
Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

Die volume van die vierkantige piramide is 4 cm^3 .

Voorbeeld 13: Berekening van die volume van 'n driehoekige piramide

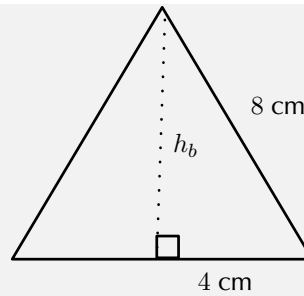
PROBLEEM

Vind die volume van 'n driehoekige piramide (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1 : **Skets die driehoek en bereken die oppervlakte**

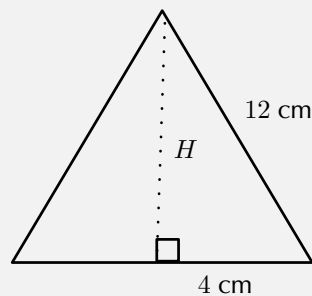


Die skuinshoogte van die driehoek (h_b) kan bereken word met die stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} 8^2 &= 4^2 + h_b^2 \\ \therefore h_b &= \sqrt{8^2 - 4^2} \\ &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Oppervlakte van basis driehoek} &= \frac{1}{2}b \times h_b \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \\ &= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 2 : Skets die sykant driehoek en bereken H , die loodregte hoogte van die piramide



$$\begin{aligned} 12^2 &= 4^2 + h^2 \\ \therefore H &= \sqrt{12^2 - 4^2} \\ &= 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 3 : **Bereken die volume van die piramide**

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} b h_b \times H \\ &= \frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times 8\sqrt{2} \\ &= 104,5 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

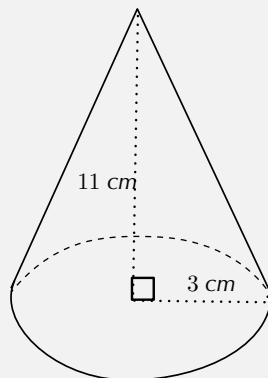
Stap 4 : **Skryf die finale antwoord**

Die volume van die driehoekige piramide is $104,5 \text{ cm}^3$.

Voorbeeld 14: Berekening van die volume van 'n keël

PROBLEEM

Vind die volume van die volgende keël (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1 : **Vind die oppervlakte van die basis**

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2 \\
 &= \pi 3^2 \\
 &= 9\pi \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Bereken die volume**

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H \\
 &= \frac{1}{3} \times 9\pi \times 11 \\
 &= 103,7 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

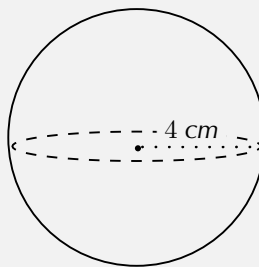
Stap 3 : **Skryf die finale antwoord**

Die volume van die keël is $103,7 \text{ cm}^3$.

Voorbeeld 15: Berekening van die volume van 'n sfeer

PROBLEEM

Vind die volume van die volgende sfeer (korrek tot 1 desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1 : **Gebruik die formule om die volume te bereken**

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
 &= \frac{4}{3}\pi(4)^3 \\
 &= 268,1 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Skryf die finale antwoord**

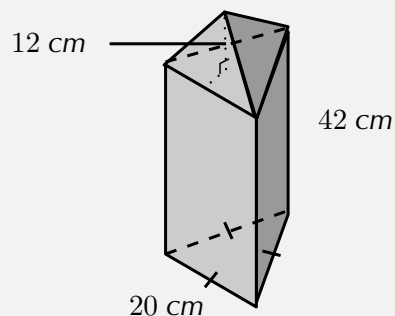
Die volume van die sfeer is $268,1 \text{ cm}^3$.

Voorbeeld 16: Berekening van die volume van 'n saamgestelde voorwerp

PROBLEEM

'n Driehoekige piramide word bo-op 'n driehoekige prisma geplaas. Die prisma het 'n gelyksydige driehoek met 'n sy lengte van 20 cm as basis en 'n hoogte van 42 cm. Die piramide is 12 cm hoog. Bereken die volgende (korrek tot 1 desimale plek):

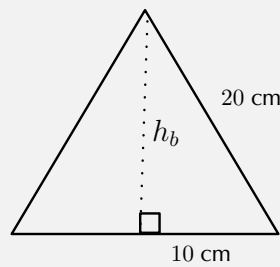
1. Vind die totale volume van die voorwerp.
2. Vind die oppervlakte van elke vlak van die piramide.
3. Vind die totale buite-oppervlakte van die voorwerp.



OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die volume van die prisma**

a) Vind die hoogte van die basis driehoek



$$20^2 = 10^2 + h_b^2$$

$$\therefore h_b = \sqrt{20^2 - 10^2}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

a) Vind die oppervlakte van die basis driehoek

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte van basis driehoek} &= \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3} \\ &= 100\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

c) Vind die volume van die prisma

$$\begin{aligned} \therefore \text{Volume van prisma} &= \text{oppervlakte van basis driehoek} \times \text{hoogte van prisma} \\ &= 100\sqrt{3} \times 42 \\ &= 4\,200\sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Stap 2 : Vind die volume van die piramide

Die oppervlakte van die basis driehoek is gelyk aan die oppervlakte van die basis van die piramide.

$$\begin{aligned} \therefore \text{Volume van piramide} &= \frac{1}{3}(\text{oppervlakte van basis}) \times H \\ &= \frac{1}{3} \times 100\sqrt{3} \times 12 \\ &= 400\sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Stap 3 : Bereken die totale volume

$$\begin{aligned}
 \text{Totale volume} &= 4\,200\sqrt{3} + 400\sqrt{3} \\
 &= 4\,600\sqrt{3} \\
 &= 7\,967,4 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Dus die totale volume van die voorwerp is $7\,967,4 \text{ cm}^3$.

Voorbeeld 17: Vind die oppervlakte van 'n komplekse voorwerp

PROBLEEM

Met dieselfde komplekse voorwerp soos in die vorige voorbeeld, kry jy die bykomende inligting dat die skuinshoogte h_s van die driehoekige piramide $13,3 \text{ cm}$ is. Bereken die totale oppervlakte van die voorwerp.

OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die buite-oppervlakte van elke sigbare vlak van die piramide**

$$\begin{aligned}
 \text{Oppervlak van een vlak van die piramide} &= \frac{1}{2}b \times h_s \\
 &= \frac{1}{2} \times 20 \times 13,3 \\
 &= 133 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Omdat die basis driehoek gelyksydig is, het elke vlak dieselfde basis, en dus dieselfde oppervlakte. Daarom is die buite-oppervlakte vir elke vlak van die piramide 133 cm^2 .

Stap 2 : **Bereken die buite-oppervlakte van elke vlak van die prisma**

Elke vlak van die prisma is 'n reghoek met basis $b = 20 \text{ cm}$ en hoogte

$$h_p = 42 \text{ cm.}$$

$$\begin{aligned}\text{Oppervlak van een vlak van die prisma} &= b \times h_p \\ &= 20 \times 42 \\ &= 840 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Omdat die basis driehoek gelyksydig is, het elke vlak dieselfde oppervlakte. Daarom die buite-oppervlakte vir elke vlak van die prisma is 840 cm^2 .

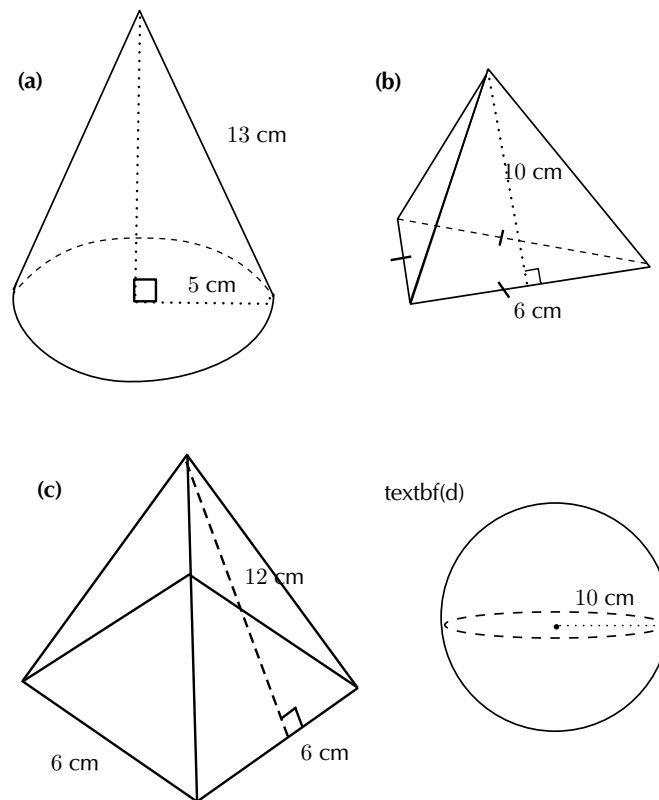
*Stap 3 : **Bereken die totale buite-oppervlakte vir die voorwerp***

$$\begin{aligned}\text{Totale buite-oppervlakte} &= \text{area van basis van prisma} + \text{area van sye van prisma} + \\ &\quad \text{oppervlakte van elke sigbare vlak van die piramide} \\ &= (100\sqrt{3}) + 3(840) + 3(133) \\ &= 3\,092,2 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

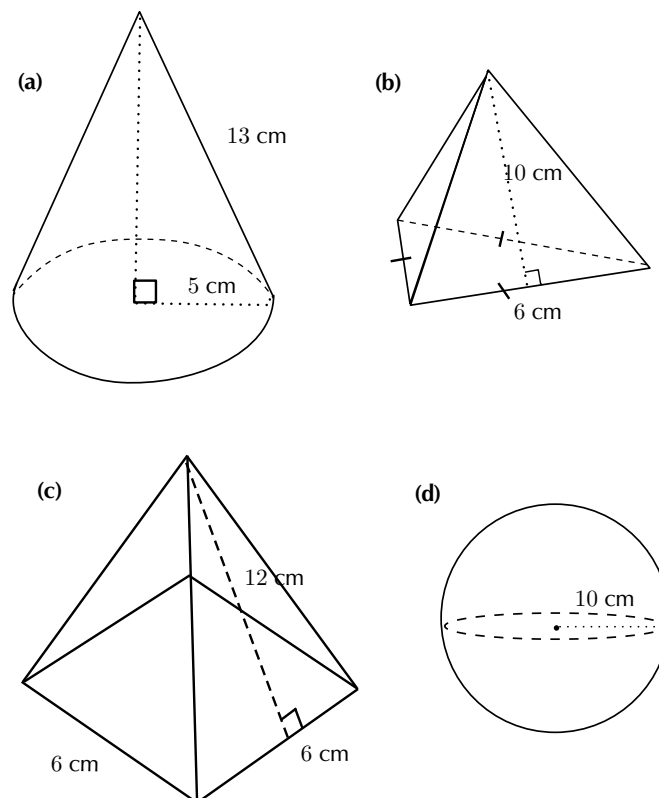
Dus, die totale buite-oppervlakte (van die sigbare kante) van die voorwerp is $3\,092,2 \text{ cm}^2$.

Oefening 12 - 4

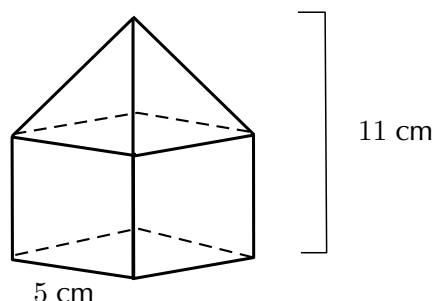
1. Vind die totale buite-oppervlakte van die volgende prisma's (korrek tot 1 desimale plek indien nodig):



2. Vind die volumes van die volgende prisms (korrek tot 1 desimale plek waar nodig):



3. Die vaste liggaam bestaan uit 'n kubus en 'n vierkantige piramide. Vind die volume en buite-oppervlak van die voorwerp (korrek tot 1 desimale plek):



(A+) Meer oefening (▶) video oplossings (?) of hulp by www.everythingmaths.co.za
 (1.) 02pg (2.) 02ph (3.) 02pi

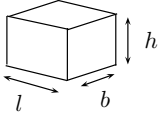
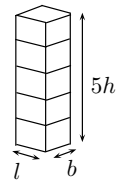
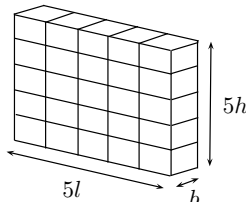
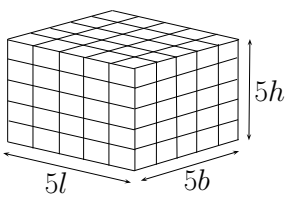
12.4 Vermenigvuldiging van 'n afmeting met 'n faktor k EMDEU

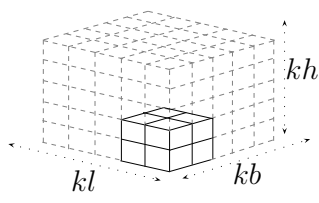
Wanneer een of meer van die afmetings van 'n prisma of 'n silinder met 'n konstante vermenigvuldig word, sal die buite-oppervlakte en die volume verander. Die nuwe oppervlakte en volume kan bereken word deur die toepaslike formules te gebruik.

Dit is moontlik om 'n verband te sien tussen die verandering in afmetings en die gevolglike verandering in buite-oppervlakte en volume. Hierdie verwantskap maak dit moontlik om die verandere volume en buite-oppervlakte te bereken as die afmetings van 'n voorwerp groter of kleiner gemaak word.

▶ Video: VMctl by www.everythingmaths.co.za

Beskou 'n rehoekige prisma met afmetings l , b en h . Ons vermenigvuldig vervolgens een, twee en drie afmetings van die prisma se met 'n konstante faktor van 5 en bereken dan die nuwe volume en buite-oppervlakte.

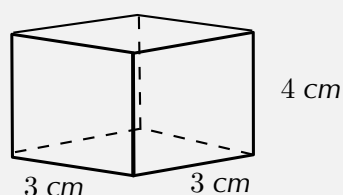
Afmetings	Volume	Buite-oppervlakte
Oorspronklike afmetings 	$V = l \times b \times h$ $= lbh$	$O = 2[(l \times h) + (l \times b) + (b \times h)]$ $= 2(lh + lb + bh)$
Vermenigvuldig een afmeting met 5 	$V_1 = l \times b \times 5h$ $= 5(lbh)$ $= 5V$	$O_1 = 2[(l \times 5h) + (l \times b) + (b \times 5h)]$ $= 2(5lh + lb + 5bh)$
Vermenigvuldig twee afmetings met 5 	$V_2 = 5l \times b \times 5h$ $= 5.5(lbh)$ $= 5^2 \times V$	$O_2 = 2[(5l \times 5h) + (5l \times b) + (b \times 5h)]$ $= 2 \times 5(5lh + lb + bh)$
Vermenigvuldig al drie afmetings met 5 	$V_3 = 5l \times 5b \times 5h$ $= 5^3(lbh)$ $= 5^3V$	$O_3 = 2[(5l \times 5h) + (5l \times 5b) + (5b \times 5h)]$ $= 2(5^2lh + 5^2lb + 5^2bh)$ $= 5^2 \times 2(lh + lb + bh)$ $= 5^2O$

Afmetings	Volume	Buite-oppervlak
Vermenigvuldig al drie afmetings met k 	$V_k = kl \times kb \times kh$ $= k^3(lbh)$ $= k^3V$	$O_k = 2[(kl \times kh) + (kl \times kb) + (kb \times kh)]$ $= k^2 \times 2(lh + lb + bh)$ $= k^2O$

Voorbeeld 18: Bereken nuwe buite-oppervlakte en volume van 'n kubus

PROBLEEM

Beskou 'n kubus met 'n hoogte van 4 cm en 'n basis sylengte van 3 cm.



1. Bereken die oorspronklike buite-oppervlakte en volume.
2. Bereken die nuwe buite-oppervlakte (A_n) en volume (V_n) as die lengte van 'n sy van die basis vermeerder word met 'n konstante faktor van 3.
3. Druk die nuwe buite-oppervlakte en volume uit as 'n faktor van die oorspronklike buite-oppervlakte en volume.

OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die oorspronklike volume en buite-oppervlakte**

$$\begin{aligned}
 V &= l \times b \times h \\
 &= 3 \times 3 \times 4 \\
 &= 36 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 2[(l \times h) + (l \times b) + (b \times h)] \\
 &= 2[(3 \times 4) + (3 \times 3) + (3 \times 4)] \\
 &= 66 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 2 : **Bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte**

Twee van die afmetings word vermeerder met 'n faktor van 3.

$$\begin{aligned}
 V_n &= 3l \times 3b \times h \\
 &= 3.3 \times 3 \times 4 \\
 &= 324 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= 2[(3l \times h) + (3l \times 3b) + (3b \times h)] \\
 &= 2[(3.3 \times 4) + (3.3 \times 3.3) + (3.3 \times 4)] \\
 &= 306 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Stap 3 : **Druk die nuwe volume en buite-oppervlakte uit as 'n faktor van die oorspronklike volume en buite-oppervlakte**

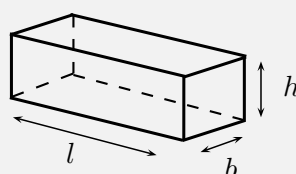
$$\begin{aligned}
 V &= 36 \\
 V_n &= 324 \\
 \frac{V_n}{V} &= \frac{324}{36} \\
 &= 9 \\
 \therefore V_n &= 9V \\
 &= 3^2 V
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 66 \\
 A_n &= 306 \\
 \frac{A_n}{A} &= \frac{306}{66} \\
 \therefore A_n &= \frac{306}{66} A \\
 &= \frac{51}{11} A
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 19: Vermenigvuldig 'n afmeting van 'n reghoekige prisma met 'n faktor k

PROBLEEM

Bewys dat as die hoogte van 'n reghoekige prisma (met afmetings l, b en h) met 'n konstante faktor k vermenigvuldig word, sal die volume ook vermenigvuldig word met k .



OPLOSSING

Stap 1 : Bereken die oorspronklike volume

Ons word oorspronklike afmetings l , b en h gegee dus die oorspronklike volume is $V = l \times b \times h$.

Stap 2 : Bereken die nuwe volume

Die nuwe afmetings is l , b , en kh en dus is die nuwe volume

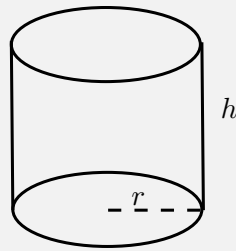
$$\begin{aligned} V_n &= l \times b \times (kh) \\ &= k(lbh) \\ &= kV \end{aligned}$$

Stap 3 : Skryf die finale antwoord

As die hoogte van 'n reghoekige prisma vermenigvuldig word met 'n faktor k , sal die volume ook vermenigvuldig word met k .

Voorbeeld 20: Vermenigvuldig 'n afmeting van 'n silinder met faktor k
PROBLEEM

Beskou 'n silinder met radius r en hoogte h . Bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte (uitgedruk in terme van r en h) as die radius vermenigvuldig word met 'n konstante faktor van k .


OPLOSSING

Stap 1 : **Bereken die oorspronklike volume en buite-oppervlakte**

$$V = \pi r^2 \times h$$

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Stap 2 : **Bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte**

Die nuwe afmetings is kr en h .

$$\begin{aligned} V_n &= \pi(kr)^2 \times h \\ &= \pi k^2 r^2 \times h \\ &= k^2 \times \pi r^2 h \\ &= k^2 V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \pi(kr)^2 + 2\pi(kr)h \\ &= \pi k^2 r^2 + 2\pi k r h \\ &= k^2(\pi r^2) + k(2\pi r h) \end{aligned}$$

Oefening 12 - 5

1. As die hoogte van 'n prisma verdubbel, met hoeveel sal die volume toeneem?
2. Beskryf die verandering in die volume van 'n reghoekige prisma as:
 - (a) die lengte en die breedte vermeerder met 'n konstante faktor van 3.
 - (b) lengte, breedte en hoogte vermenigvuldig word met 'n konstante faktor van 2.
3. Gegewe 'n prisma met 'n volume van 493 cm^3 en 'n buite-oppervlakte van $6\,007 \text{ cm}^2$, vind die nuwe buite-oppervlakte en volume vir die prisma as al die afmetings vermeerder word met 'n konstante faktor van 4.

 Meer oefening  video oplossings  of hulp by www.everythingmaths.co.za
(1.) 02pj (2.) 02pk (3.) 02pm

Hoofstuk 12 | Opsomming

 Opsommingsaanbieding: VMdml by www.everythingmaths.co.za

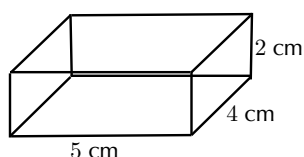
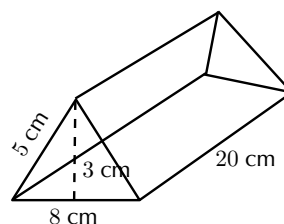
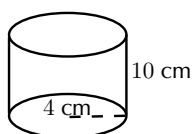
- Oppervlakte is die twee-dimensionele spasie binne die grense van 'n plat voorwerp, gemeet in vierkante eenhede.
- Oppervlakte formules:
 - vierkantige $= s^2$
 - reghoek $= b \times h$
 - driehoek $= \frac{1}{2}b \times h$
 - trapesium $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$
 - parallelogram $= b \times h$
 - sirkel $= \pi r^2$
- Buite-oppervlakte is die totale van die buite of sigbare oppervlaktes van 'n prisma.

- 'n Ontvouing is die oopgevoude 'plan' van 'n vaste liggaam.
- Volume is die drie-dimensionele spasie wat ingeneem word deur 'n voorwerp, of die inhoud van 'n voorwerp. Dit word gemeet in kubieke eenhede.
- Volume formules:
 - $\text{kubus} = l \times b \times h$
 - $\text{driekhoekige prism} = (\frac{1}{2}b \times h) \times H$
 - $\text{vierkantige prisma of kubus} = s^3$
 - $\text{silinder} = \pi r^2 \times h$
- 'n Piramide is 'n soliede geometriese figuur met 'n veelhoekbasis wat verbind is aan die toppunt waar die syvlakke ontmoet. (met ander woorde die sye is nie loodreg op die basis nie).
- Totale buite-oppervlakte formules:
 - $\text{vierkant piramide} = b(b + 2h)$
 - $\text{driehoekige piramide} = \frac{1}{2}b(h_b + 3h_s)$
 - $\text{keël} = \pi r(r + h_s)$
 - $\text{sfeer} = 4\pi r^2$
- Volume formules:
 - $\text{vierkantige piramide} = \frac{1}{3} \times b^2 \times H$
 - $\text{driehoekige piramide} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh \times H$
 - $\text{keël} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$
 - $\text{sfeer} = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2$
- Vermenigvuldiging van een of meer afmetings van 'n prisma of silinder met 'n konstante k , beïnvloed die buite-oppervlakte en volume.

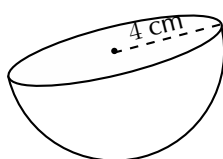
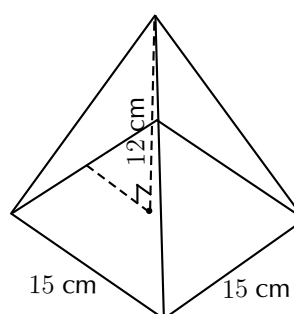
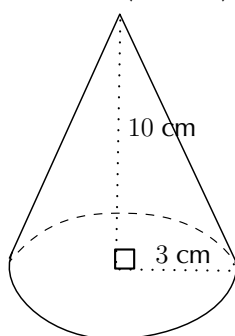
Hoofstuk 12

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Beskou die vaste liggame hieronder en beantwoord die vrae wat volg (korrek tot 1 desimale plek waar nodig):



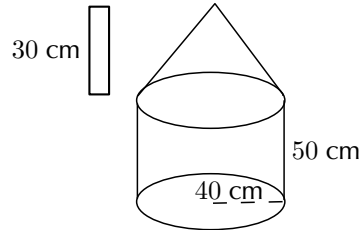
- Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.
 - Bereken die volume van elke voorwerp.
 - As elke afmeting van die voorwerpe vermeerder met 'n faktor van 3, bereken die nuwe buite-oppervlakte van elk.
 - As elke afmeting van die voorwerpe vermeerder met 'n faktor van 3, bereken die nuwe volume van elk.
2. Beskou die vaste (soliede) liggame hieronder:



- Bereken die buite-oppervlakte van die soliede liggame.

(b) Bereken die volumes van die soliede liggame.

3. Bereken die volume en buite-oppervlakte van die volgende soliede liggaam (korrek tot 1 desimale plek):



A+ Meer oefening **▶** video oplossings **?** of hulp by www.everythingmaths.co.za

(1.) 02pn (2.) 02pp (3.) 02pq

1. Algebraïese uitdrukkingen



Oefening 1-1

1. (a) Rationaal, heelgetal
(b) Irrationaal
(c) Rationaal, heelgetal, telgetal, natuurlike getal
(d) Irrationaal
2. (a) Rationaal
(b) Rationaal
(c) Rationaal
(d) Irrationaal
3. (a) Rationaal
(b) Rationaal
(c) Irrationaal
(d) Rationaal
4. (a) $\frac{1}{10}$
(b) $\frac{3}{25}$
(c) $\frac{29}{50}$
(d) $\frac{2589}{10000}$
5. (a) $0,1$
(b) $0,1\overline{2}$
(c) $0,1\overline{23}$
(d) $0,11414\overline{5}$
6. (a) $0,6$
(b) $1,2\overline{7}$
(c) $4,8\overline{3}$
(d) $2,1$
7. (a) $\frac{5}{9}$
(b) $\frac{57}{90}$
(c) $\frac{526}{99}$

Oefening 1-2

1. 12,567
2. 3,317
3. 0,267
4. 1,913
5. 6,325

6. 0,056

Oefening 1-3

1. 4 en 5
2. 5 en 6
3. 1 en 2
4. 4 en 5

Oefening 1-4

1. $2y^2 + 8y$
2. $y^2 + 7y + 10$
3. $2 + 3t + 2t^2$
4. $x^2 - 16$
5. $6p^2 + 29p + 9$
6. $3k^2 + 16k - 12$
7. $s^2 + 12s + 36$
8. $-49 + x^2$
9. $9x^2 - 1$
10. $14k^2 + 17k + 6$
11. $1 - 8x + 16x^2$
12. $y^2 - 2y - 15$
13. $16 - x^2$
14. $81 + 18x + x^2$
15. $-10y^3 + 4y^2 + 103y - 132$
16. $-14y^3 + 26y^2 + 4y - 16$
17. $-20y^3 - 116y^2 - 13y + 6$
18. $-144y^3 + 96y^2 - 3y - 9$
19. $-20y^2 - 80y - 30$
20. $-10y^7 - 39y^6 - 36y^5$
21. $84y^2 - 153y + 33$
22. $49y^3 + 42y^2 + 79y + 10$
23. $72y^2 - 18y + 27$
24. $-6y^6 - 85y^4 + 3y^3 + 176y^2 + 48y$

Oefening 1-5

1. $2(l + w)$
2. $4(3x + 8y)$
3. $2x(3x + 1 + 5x^2)$
4. $xy(2y^2 + yz + 3)$
5. $-2ab(b + a)$
6. $7a + 4$
7. $10(2a - 1)$
8. $3b(6a - c)$
9. $6k(2j + 3q)$
10. $(4k - 2)(4k + 2)$
11. $3(a^2 + 2a - 9)$
12. $12a(2a^2 - 1)$
13. $-2a(b + 4)$
14. $8kj(3 - 2k)$
15. $-ab(a + b)$
16. $12jk^2(2j + 1)$
17. $18b^2q(4 - bq)$
18. $(3 - y)(-4 + k)$
19. $(a - 1)(a - 5)(a + 5)$
20. $(b + 4)(m)(b - 6)$
21. $(a + 7)(a^2 + 9)$
22. $(b - 4)(3b + 7)$
23. $(abc - 1)(abc + 1)$

Oefening 1-6

1. $(3 + a)(2x + 1)$
2. $(x + 5)(x - 6)$
3. $(5 - a)(x + 2y)$
4. $(a - x)(a - 2)$
5. $(y + 2)(5x - 3)$
6. $(-a + b)(a + 1)$

Oefening 1-7

1. (a) $(x + 5)(x + 3)$
(b) $(x + 6)(x + 4)$
(c) $(x + 8)(x + 1)$

- (d) $(x+7)(x+2)$
 (e) $(x+12)(x+3)$
 (f) $(x+6)(x+6)$
 2. (a) $(x+5)(x-3)$
 (b) $(x+3)(x-1)$
 (c) $(x+4)(x-2)$
 (d) $(x+5)(x-4)$
 (e) $(x-5)(x+4)$
 (f) $2(x+10)(x+1)$
 3. (a) $(3x+1)(x+6)$
 (b) $(6x+1)(x+1)$
 (c) $(6x+1)(2x+1)$
 (d) $(2x+1)(4x+1)$
 4. (a) $(3x+1)(x+6)$
 (b) $(7x+1)(x-1)$
 (c) $(4x-1)(2x-1)$
 (d) $(6x+3)(x-3)$

Oefening 1-8

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$
2. $(3-m)(9+3m+m^2)$
3. $2(x-y)(x^2+xy+y^2)$
4. $3(k+3q)(k^2-3kq+9q^2)$
5. $(4t-1)(16t^2+4t+1)$
6. $(8x-1)(8x+1)$
7. $(5x+1)(25x^2-5x+1)$
8. Geen oplossing
9. $z(1-5z)(1+5z+25z^2)$
10. $(2m^2+n^3)(4m^4-2m^2n^3+n^6)$
11. $(p^5-\frac{1}{2}y^4)(p^10+\frac{1}{2}p^5y^4+\frac{1}{4}y^8)$
12. $[1-x+y][1+x-y+x^2-2xy+y^2]$

Oefening 1-9

1. $\frac{a}{5}$
2. $\frac{a+5}{2}$
3. 5
4. a
5. $\frac{3a}{2}$
6. $\frac{a+3}{a+2}$
7. $\frac{a(3b+1)}{b}$
8. $\frac{4xy}{3}$
9. $\frac{p(y-2)}{3y}$
10. $\frac{3(a+3)}{98}$

11. $\frac{4a^2(a-5)}{6(a+5)^2}$
12. $\frac{(3x+4)^2}{96p^2}$
13. $\frac{4}{3}$
14. $2a$
15. $\frac{3q}{8}$
16. $\frac{5(a+b)}{24b}$
17. af
18. $\frac{2z+4y+3x}{xyz}$
19. 5
20. $\frac{2(k-1)}{(k^2+2)(k+2)}$
21. $\frac{5t+7}{6q}$
22. $\frac{(5p-2)}{(p-2)^2(p+2)}$
23. $\frac{-xy}{x^2-y^2}$
24. $\frac{m+1}{m^2-mn+n^2}$
25. $\frac{f}{h^3-f^3}$
26. $\frac{2x-1}{6}$
27. 0
28. $-\frac{x^2-3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$
29. $\frac{3(p^2-pq+q^2)}{p^2}$
30. $\frac{a^2+4b-4b^2}{(a-2b^2)(a+2b)}$

Einde van hoofdstuk oefening

1. (a) Rationale
 (b) Irrationale
 (c) Irrationale
 (d) Irrationale
2. (a) $\frac{3}{5}$
 (b) $\frac{3}{500}$
 (c) $\frac{1}{100}$
 (d) $\frac{221}{18}$
4. $\frac{78}{90}$
5. (a) 0,5
 (b) 1,00
 (c) 0,11
 (d) 1,00
6. (a) 3,142
 (b) 1,618
 (c) 1,414
 (d) 2,718
9. (a) $3,142 \frac{1}{500}$
 (b) $1,618 \frac{809}{500}$
 (c) $1,414 \frac{707}{500}$
 (d) $2,718 \frac{1}{500}$

10. (a) 2 en 3
 (b) 3 en 4
 (c) 4 en 5
 (d) 5 en 6
 (e) 1 en 2
 (f) 2 en 3
 (g) 2 en 3
 (h) 3 en 4
11. 2 en 3
12. 3 en 4
13. (a) $(a-3)(a+3)$
 (b) $(m+6)(m-6)$
 (c) $(3b-9)(3b+9)$
 (d) $(4b+5a)(4b-5a)$
 (e) $(m+\frac{1}{3})(m-\frac{1}{3})$
 (f) $5(1-ab^3)(1+ab^3)$
 (g) $b(4a^2-9)(2a+3)(2a-3)$
 (h) $(a-5)(a-5)$
 (i) $(4b+7)(4b+7)$
 (j) $(2a-6b)(a-3b)$
 (k) $-4b^2(6b^3-1)(6b^3-1)$
 (l) $(2-x)(2+x)(4+x^2)$
 (m) $7(x-2)(x+y)$
 (n) $(y-10)(y+3)$
 (o) $(1-x)^2(1+x)$
 (p) $(p-1)(-3p-2)$
 (q) $(x+y)(1-x^2+xy-y^2)$
 (r) $x(x-2)+(1+y)(1-y)(1+y^2)$
 (s) $(x-1)(x^2+x+1)(4b-x)$
 (t) $3(p-\frac{1}{3})(p^2+\frac{p}{3}+\frac{1}{9})$
 (u) $(2x^2-5y^3)(4x^4+10x^2y^3+25y^6)$
 (v) $(-p)(12+18p+7p^2)$
14. (a) $-8a+4$
 (b) $125a^3-64b^3$
 (c) $16m^4-81$
 (d) $a^2+4ab+4b^2-c^2$
 (e) $p^2-2pq+q^2$
 (f) $\frac{12-x^2}{6x}$
 (g) $\frac{-14}{(a+7)(a-7)}$
 (h) $\frac{32x^3+x+2}{2x^3}$
 (i) $\frac{4a-1}{(2a+1)(2a-1)(a-1)}$

$$15. \quad (j) \quad \frac{x(x+1)}{x^2+x+6}$$

$$16. \quad 5x$$

$$18. \quad a^2 + 2ab + 4b^2$$

$$19. \quad 9x^2 - 3x + 1$$

2. Vergelykings en ongelykhede

EMDEW

Oefening 2-1

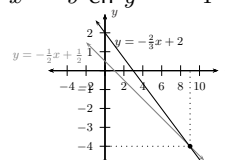
1. 5
2. 0
3. $-\frac{7}{8}$
4. 12
5. 11
6. $\frac{117}{20}$
7. 15
8. $\frac{9}{10}$
9. $\frac{100}{26}$
10. 1
11. 3
12. 6
13. $\frac{17}{12}$
14. $\frac{20}{3}$
15. 26
16. 5
17. 4
18. $-\frac{36}{11}$
19. 2
20. Geen oplossing
21. 5
22. 24
23. -6
24. $-\frac{7}{3}$
25. 2
26. $-\frac{17}{13}$
27. -12,5
28. $-\frac{17}{3}$
29. $-\frac{1}{6}$
30. -3

Oefening 2-2

1. $-\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{3}$
2. $\frac{9}{5}$ of -6
3. $-\frac{3}{2}$ of $\frac{3}{2}$
4. $-\frac{1}{2}$ of $\frac{9}{2}$
5. $\frac{3}{2}$
6. 0 of $-\frac{4}{5}$
7. 4 of $-\frac{3}{2}$
8. $\frac{6}{5}$ of $\frac{8}{3}$
9. 4 of 11
10. 2
11. $\frac{3}{5}$ of 3
12. 0 of 3
13. 5
14. $\sqrt{18}$ of $-\sqrt{18}$
15. -1 of 7
16. 7 of $-\frac{11}{4}$
17. $\frac{3}{7}$ of $-\frac{1}{2}$
18. -2 of 3
19. 1 of $-5\frac{3}{8}$
20. 0 of $\frac{2}{3}$

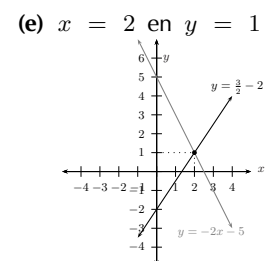
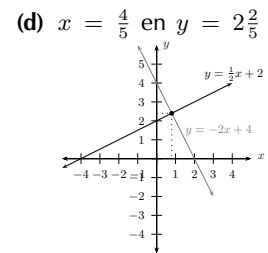
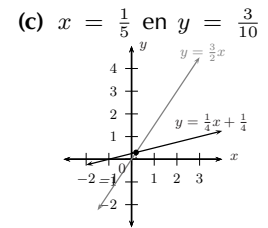
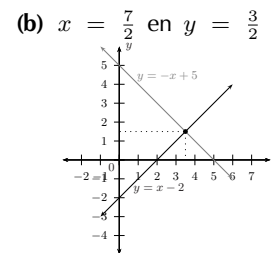
Oefening 2-3

1. (a) $y = \frac{-3}{2}$ en $x = -7$
 (b) $y = 3$ en $x = 5$
 (c) $x = -1$ en $y = -1$
 (d) $a = 5\frac{1}{3}$ en $b = 1\frac{1}{3}$
 (e) $x = \frac{1}{7}$ en $y = -\frac{1}{4}$
2. (a) $x = 9$ en $y = -4$



Oefening 2-4

1. $t = 2$ hure
2. $L = 18$ en $S = 2$
3. $w = 28$, $l = 45$ en $d = 53$



4. -34
5. 30° en 60°
6. $l = 16$ cm en $b = 8$ cm
7. $x = 7$ of $x = -3$
8. $l = 6$ cm en $w = 4$ cm
9. $\frac{19}{50}$
10. 9 en 11
11. $\frac{1}{2}$
12. 8 jaar oud
13. Murunwa is 7 en
Tshamano is 35

Oefening 2-5

1. $a = \frac{2(s-ut)}{t^2}$
2. $n = \frac{pV}{RT}$
3. $x = \frac{2b^2}{2b-1}$
4. $r = \sqrt{V}\pi h$
5. $h = \frac{E\lambda}{C}$
6. $h = \frac{A-2\pi r}{2\pi r}$
7. $\lambda = \frac{D}{ft}$
8. $m = \frac{E}{gh + \frac{1}{2}V^2}$
9. $x = -a$ of $x = -b$
10. $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$
11. $u = \frac{vw}{w-v}$
12. $r = \pm\sqrt{R^2 - \frac{A}{\pi}}$
13. $C = \frac{160}{9} - \frac{5}{9}F$

$$14. r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Oefening 2-6

1. $x < -2$
2. $x \geq -3$
3. $x < \frac{-5}{4}$
4. $x > \frac{2}{5}$
5. 0
6. $-1 \leq x < 4$
7. $-1 < x \leq 5$
8. $x > 2$
9. $x \geq 1$
10. $-12 \leq x \leq 1$
11. $y < \frac{6}{7}$
12. $-4 \leq y \leq 0$
13. $-20 < x < 7$

Einde van hoofdstuk oefening

1. (a) -8
(b) $\frac{1}{2}$
(c) Geen oplossing
(d) -2
(e) 1

- (f) 10
- (g) 5
- (h) $\frac{1}{3}$
- (i) $x = 2$ of $x = 1$
- (j) $y = 2$ of $y = -3$
- (k) $x = 2$ of $x = \frac{-9}{2}$
- (l) 4
- (m) $x \geq 2$
- (n) $x < -1$
- (o) $x > \frac{588}{10}$
- (p) $a \leq -\frac{7}{5}$
- (q) $-3 \leq k < 2$
- (r) $x = 7$ of $x = 6$

2. (a) $I = \frac{P}{V}$
(b) $m = \frac{E}{c^2}$
(c) $t = \frac{v-u}{a}$
(d) $t = \frac{uv}{u+v}$
(e) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
(f) $y = mx + c$
3. (a) $x = 1$ en $y = 2$
(b) $x = 4$ en $y = 2$
(c) $x = 5$ en $y = -2$
(d) Geen oplossing
4. (a) $x = \frac{120}{13}$
(b) Liniaal: R 5; pen: R 3
(c) $\frac{5}{9}$ km
(d) 8 km en 12 km
(e) R 20,00

3. Eksponentiale



Oefening 3-1

1. 1
2. 16
3. $\frac{1}{36}$
4. 40
5. $\frac{27}{8}$
6. x^{3t+3}
7. 3^{2a+3}
8. a^{2x}
9. $\frac{8}{p^6}$
10. $8t^{12}$

$$11. 3^{2n+6}$$

$$12. \frac{1}{27}$$

Oefening 3-2

1. $3t^2$
2. $8x$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{3}$
5. $3p^3$

Oefening 3-3

1. (a) 0
(b) $-\frac{5}{2}$
(c) -7
(d) $\frac{5}{9}$
(e) 4
(f) $-\frac{1}{2}$
(g) $\frac{4}{5}$
(h) 3
(i) 1
(j) $\frac{3}{2}$ of 0

- (k) 1
 (l) $-3\frac{1}{2}$
 (m) -3
 (n) -3
 (o) -1 of 3
 2. 7

Einde van hoofdstuk oefening

1. (a) $2t^3$
 (b) $5^{5x+y+3z}$
 (c) b^{k^2+k}
 (d) 864^p

- (e) $27m^t$
 (f) $\frac{1}{3x^5}$
 (g) $\frac{1}{625}$
 (h) $\frac{27}{4}$
 (i) $\frac{1}{27}$
 (j) $8x^{6a}y^{3b}$
 (k) 4^{x+3}
 (l) 22
 (m) -27
 (n) $\frac{6}{5}$
 (o) $\frac{1}{3}$
 (p) $\frac{1}{8}$
 (q) 14

- (r) $2^{2p} - 2^p + 1$
 2. (a) -3
 (b) 1
 (c) $\frac{2}{3}$
 (d) $\frac{1}{2}$
 (e) -1
 (f) 16
 (g) $\frac{1}{16}$
 (h) -1
 (i) 1 of 16
 (j) 2
 (k) $\frac{1}{81}$
 (l) 81

4. Getalpatrone



Oefening 4-1

1. (a) 35; 45; 55
 (b) 7; 12; 17
 (c) 21; 18; 15
 2. (a) 8
 (b) -1
 (c) -9 en -5
 3. (a) $T_n = 3n - 1$; $T_{10} = 29$; $T_{50} = 149$; $T_{100} = 299$
 (b) $T_n = 4n - 4$; $T_{10} = 36$; $T_{50} = 196$;

- $T_{100} = 396$
 (c) $T_n = 5 - 3n$; $T_{10} = -25$; $T_{50} = -145$; $T_{100} = -295$

Einde van hoofdstuk oefening

1. (a) 49
 (b) -10
 (c) 18,9
 2. (a) $T_n = 4n - 1$

- (b) $T_n = 3n - 5$
 (c) $T_n = 4n + 7$
 (d) $T_n = \frac{n}{3}$
 3. 111
 4. (a) 4
 (b) 3
 (c) $T_n = 3n + 1$
 (d) 76
 5. 10
 6. 77
 7. (c) $9 + (10x + y) = 10(x + 1) + (y - 1)$

5. Funksies



Oefening 5-1

1. (a) $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 7\}$
 (b) $\{y : y \in \mathbb{R}, -13 \leq y < 4\}$
 (c) $\{z : z \in \mathbb{R}, z > 35\}$
 (d) $\{t : t \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \leq t < 21\}$

- (e) $\{p : p \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}\}$
 (f) $\{m : m \in \mathbb{R}, m > -\sqrt{3}\}$
 2. (a) $(-\infty; 6]$
 (b) $(-5; 5)$
 (c) $(\frac{1}{5}; \infty)$

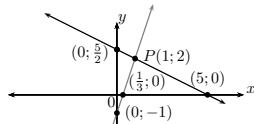
- (d) $[21; 41)$

Oefening 5-2

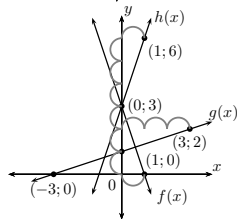
1. (a) $(0; 1)$ en $(-1; 0)$; vermeerder
 (b) $(0; -1)$ en $(1; 0)$;

- vermeerder
 (c) $(0; -1)$ en $(\frac{1}{2}; 0)$;
 vermeerder
 (d) $(0; 1)$ en $(\frac{1}{3}; 0)$;
 verminder
 (e) $(0; 2)$ en $(-3; 0)$;
 vermeerder
 (f) $(0; 3)$;
 horisontale lyn
 (g) $(0; 0)$;
 vermeerder
 (h) $(0; 3)$ en $(2; 0)$;
 verminder

2. (a) $a(x) = -\frac{3}{4}x + 3$
 (b) $b(x) = \frac{3}{2}x - 6$
 (c) $p(x) = 3$
 (d) $d(x) = -\frac{3}{4}x$

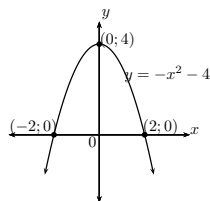


3.



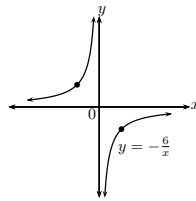
4.

Oefening 5-3



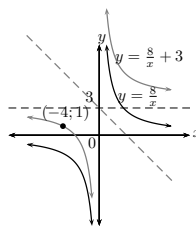
2.
 3. (a) $a = 1$ en $p = -9$
 (b) $b = -1$ en $q = 23$
 (c) $x \leq -4$ of $x \geq 4$
 (d) $x \geq 0$

Oefening 5-4



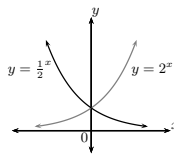
1.

- (a) Ja
 (b) $y = -24$
 (c) Verminder
 (d) $y = 0$ en $x = 0$
 (e) $(-3; 2)$



2.

Oefening 5-5



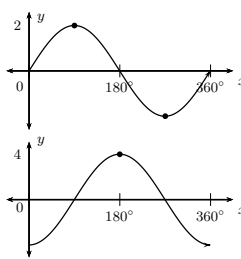
1.

- (a) Asimptote
 (b) $y = \frac{1}{2}x$
 (c) $(0; 1)$

2.

- (a) $f(x) = 3^x$
 (b) $h(x) = -3^x$
 (c) Waardeversameling:
 $(-\infty; 0)$
 (d) $g(x) = 3^{-x}$
 (e) $j(x) = 2 \cdot 3^x$
 (f) $k(x) = 3^x - 3$

Oefening 5-6

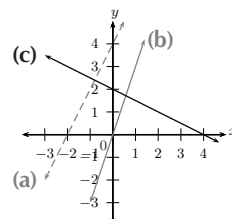


1.

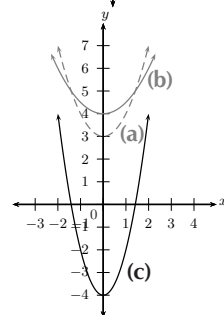
(a)

(b)

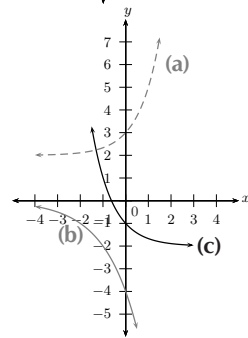
Einde van hoofdstuk oefening



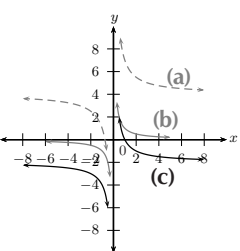
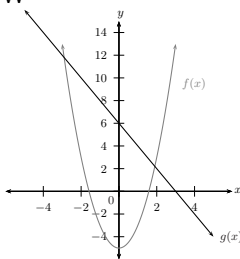
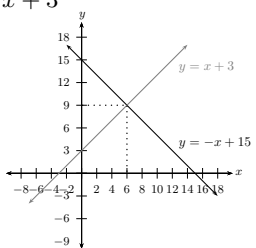
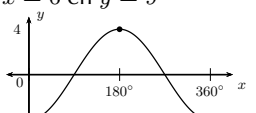
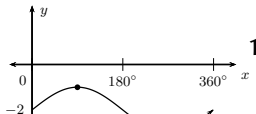
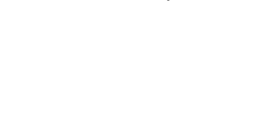
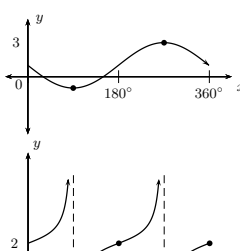
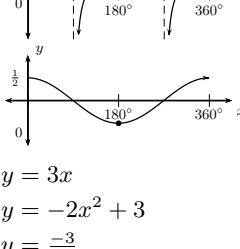
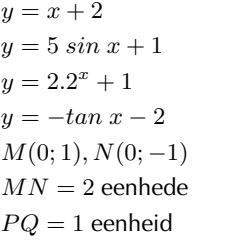
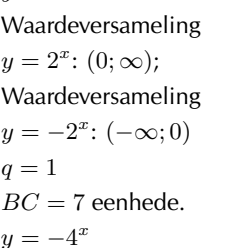
1.



2.



3.

4. 
5. (a) V
(b) V
(c) W
(d) V
(e) V
(f) W
6. (a) 
(b) $(-3; 12)$ en $(2; 2)$
(c) i. $x \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$
ii. $x \in (3; \infty)$
iii. $x \in [-3; 2]$
(d) $y = -2x^2 + 6$
7. 1,6 eenhede
8. (a) $x + y = 15$; $y = x + 3$

(b) $x = 6$ en $y = 9$
(c) 
9. (a) 
(b) 
10. (a) $y = 3x$
(b) $y = -2x^2 + 3$
(c) $y = \frac{-3}{x}$
(d) $y = x + 2$
(e) $y = 5 \sin x + 1$
(f) $y = 2 \cdot 2^x + 1$
(g) $y = -\tan x - 2$
11. (a) $M(0; 1), N(0; -1)$
(b) $MN = 2$ eenhede
(c) $PQ = 1$ eenheid
(d) $y = 2^{-x}$
(e) Waardeversameling $y = 2^x: (0; \infty)$; Waardeversameling $y = -2^x: (-\infty; 0)$
12. (a) $q = 1$
(b) $BC = 7$ eenhede.
(c) $y = -4^x$
(d) $y = 4^x + 1$
(e) $x = 0$
(f) Waardeversameling $f(x): (0; \infty)$; Waardeversameling $g(x): (-\infty; 1]$
13. (b) $y = x^2 + 4$
(c) Definisieversameling
14. 
(c) 
(d) 
(e) 
15. (a) $A(\sqrt{8}; \sqrt{8})$ en $B(-\sqrt{8}; -\sqrt{8})$
(b) $CD = 2\sqrt{8}$ eenhede
(c) $AB = 8$ eenhede
(d) $EF = 2$ eenhede
16. (a) $A(-1; 0), B(1; 0)$ en $C(0; 3)$
(b) Die twee grafieke sny mekaar op die punt D .
(c) $D(2; -9)$
(d) $y = -6x + 3$
17. (a) Definisieversameling: $\{\theta : 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \theta \neq 90^\circ; 270^\circ\}$
(b) Amplitude = 3
(c) i. $\{0^\circ; 180^\circ; 360^\circ\}$
ii. $(0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$
iii. $\{\theta : 90^\circ < \theta < 270^\circ, \theta \neq 180^\circ\}$
iv. $(0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$

6. Finansies en groei



Oefening 6-1

1. R 4 025
2. (a) R 324
(b) R 3 937,50
3. 19 jare
4. 1,25% p.a

Oefening 6-2

1. (a) R 3 825
(b) R 4 743
(c) R 197,63
(d) R 5 418
2. (a) R 12 962,50
(b) R 4 462,50
(c) R 360,07
3. (a) R 5 400
(b) R 4 251,97

Oefening 6-3

1. R 4 044,69
2. 8,45% p.a
3. R 59 345,13

Oefening 6-4

1. R 2 174,77
2. R 38,64
3. 553 babas

Oefening 6-5

1. (a) R 1 400
(b) R 200
(c) R 100
2. (a) USA
(b) Sollie

Einde van hoofstuk oefening

1. R 1 840
2. (a) R 534,25
(b) R 520
3. Bank B
4. R 200
5. R 200
6. (a) Enkelvoudige rente
(b) Saamgestelde rente
7. (a) R 205
(b) R 286,52
(c) R 128
8. 1 AUD = 82,03 Yen
9. 8,5% p.a
10. (a) 62,3 miljoen mense
(b) $\approx 1,7\%$

7. Trigonometrie



Oefening 7-1

1. (a) $a = \text{aangr};$
 $b = \text{skuins};$
 $c = \text{teen}$
(b) $a = \text{teen};$
 $b = \text{aangr};$
 $c = \text{skuins}$
(c) $a = \text{skuins};$
 $b = \text{teen};$
 $c = \text{aangr}$
(d) $a = \text{teen};$
 $b = \text{skuins};$
 $c = \text{aangr}$
(e) $a = \text{aangr};$
 $b = \text{skuins};$
 $c = \text{teen}$
(f) $a = \text{aangr};$
 $b = \text{teen};$
 $c = \text{skuins}$
2. (a) 2,14
(b) 0,62
(c) 0,28
(d) 0,21
(e) 0,90
(f) 1,15
(g) 0,23
(h) 2,52
(i) 0,67
3. (a) W
(b) V

4. (a) $\sin \hat{A} = \frac{CB}{AC}$
(b) $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$
(c) $\tan \hat{A} = \frac{CB}{AB}$
(d) $\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$
(e) $\cos \hat{C} = \frac{CB}{AC}$
(f) $\tan \hat{C} = \frac{AB}{CB}$
5. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\sqrt{3}$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
6. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

- (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) 1

Oefening 7-2

1. (a) $\frac{1}{2}$
(b) $1\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Oefening 7-3

1. (a) $a = 37,31$ eenhede
(b) $b = 8,91$ eenhede
(c) $c = 10,90$ eenhede
(d) $d = 21,65$ eenhede
(e) $e = 41,04$ eenhede
(f) $f = 33,43$ eenhede
(g) $g = 29,46$ eenhede
(h) $h = 10,00$ eenhede
2. (a) $\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}$
(b) $\cos \hat{D} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$
(c) $\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB}$
3. $MN = 12,86$ eenhede;
 $NP = 15,32$ eenhede

Oefening 7-4

1. (a) $59,5^\circ$
(b) $53,1^\circ$
(c) $71,3^\circ$
(d) $80,1^\circ$
(e) $41,8^\circ$
(f) Geen oplossing
(g) $41,4^\circ$
(h) $18,1^\circ$
(i) $40,5^\circ$
(j) $53,1^\circ$

- (k) $18,4^\circ$
(l) Geen oplossing
(m) $109,8^\circ$
(n) $26,6^\circ$
(o) $17,7^\circ$
2. (a) $24,0^\circ$
(b) $35,2^\circ$
(c) $50,6^\circ$
(d) $26,3^\circ$
(e) $37,0^\circ$
(f) $45,0^\circ$

Oefening 7-5

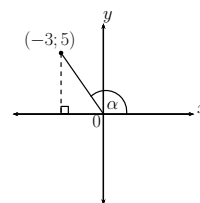
1. $53,13^\circ$
2. $35,30^\circ$
3. 26 m
4. 15,05 m

Oefening 7-6

1. (a) $OB = \sqrt{10}$ eenhede
(b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$
(c) $\frac{\sqrt{10}}{-3}$
(d) -3
2. (a) $\frac{-\sqrt{21}}{5}$
(b) $-\frac{2}{5}$
3. (a) $\frac{\sqrt{t^2+4}}{2}$
(b) $\frac{2}{t}$
(c) $\frac{4}{t^2+4}$
(d) -1

Einde van hoofdstuk oefening

1. $1\frac{1}{2}$



2. (a) $\frac{-3}{\sqrt{34}}$
(b) -1
3. (a) $42,07^\circ$
(b) $63,43^\circ$
(c) 25°
(d) 45°
4. (a) $a = 13,86$ cm
(b) $b = 12,56$ cm
(c) $c = 4,30$ cm
(d) $d = 7,78$ cm
(e) $e = 5,34$ cm
(f) $f = 9,20$ cm
(g) $g = 1,65$ cm
5. (a) 17,32 cm
(b) 10 cm
(c) $25,08^\circ$
6. $19,47^\circ$
7. $53,54^\circ$
8. 11,88 eenhede
9. $33,69^\circ$
10. $23,96^\circ$
11. 8,35 mm; 9,96 mm
12. (a) 5 cm
(b) 4,83 cm; 1,29 cm
13. (a) 18°
(b) 23°
14. $97,12^\circ$
15. 5,65 cm; 8,70 cm

8. Analitische meetkunde

Oefening 8-1

1. (a) $\sqrt{29}$
(b) $\sqrt{52}$
(c) $\sqrt{17}$

2. (a) $x = 3$ of $x = 9$
(b) $y = 3$ of $y = -5$

Oefening 8-2

1. (a) 1
(b) $\frac{11}{8}$
(c) $\frac{4}{3}$

2. (a) $\frac{-10}{3}$
(b) 5

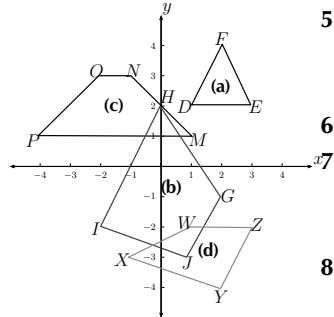
Oefening 8-3

- (a) $AB \parallel CD$
(b) Geeneen
(c) Geeneen
- (a) Op dieselfde lyn
(b) Op dieselfde lyn
(c) Nie op dieselfde lyn nie
- $\frac{1}{2}$
- 6

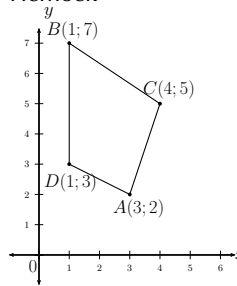
Oefening 8-4

- (a) $(-1; 6)$
(b) $(14; 32)$
(c) $(\frac{2x-3}{2}; \frac{2y-5}{2})$
- $P(8; 13)$
- $S(4; -5)$

Einde van hoofstuk oefening



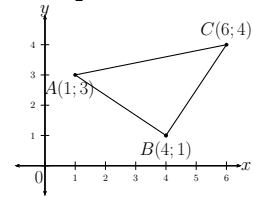
- 1.
- (a) $FG = \sqrt{26}; IH = \sqrt{41}; GH = \sqrt{8}; FI = \sqrt{29}$
(b) Nee
(c) Nee
(d) Vierhoek



- (a)

- (b) $AB = \sqrt{10}; BC = \sqrt{13}; CD = 4; DA = \sqrt{5}$

- (b) i. $\sqrt{10}$
ii. 3
(c) Trapezium
- $H(3; 3)$
- (a) $\sqrt{34}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$
- $a = 0; b = \frac{9}{2}$



- (a)
(c) $(\frac{7}{2}; \frac{7}{2})$
(d) $\frac{-2}{3}$
- (a) $y = \frac{1}{3}x + 3$
(b) $\sqrt{40}$

9. Statistiek

Oefening 9-1

- (a) Gemiddelde = 13,2; Mediaan = 11; Modus = 8
(b) Gemiddelde = 26; Mediaan = 25; Modus = 24
(c) Gemiddelde = 11,2; Mediaan = 11; Modus = 11
(d) Gemiddelde = 34,29; Mediaan = 32; Geen modus
- Gemiddelde = 38,3; Mediaan = 38; Modus = 33

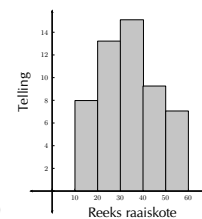
en 42

- (a) 5
(b) 7

Oefening 9-2

- (a)

Groep	Frek
11 – 20	6
21 – 30	13
31 – 40	15
41 – 50	9
51 – 60	7



(b)

Oefening 9-3

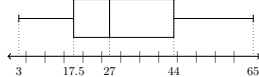
- $53; 50 < m \leq 55; 50 < m \leq 55$
- $71,66; 65 < t \leq 75; 65 < t \leq 75$
- (a) $700 < x \leq 800$
(b) 33 600
(c) 700

- (d) 750
(e) R 588 000

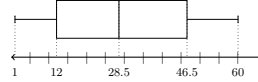
Oefening 9-4

- 9
- $Q_1 = 6,2$; $Q_2 = 18$;
 $Q_3 = 29$
- $R = 70$; $Q_1 = 41,5$;
 $Q_2 = 49,5$; $Q_3 = 66,5$;
 $IQR = 25$
- (a) 15; 9; 16
(b) 12; 7,5; 15,5
(c) 10; 8; 7,5
(d) 5; 4; 3,75
(e) 14; 12; 19
(f) 22; 15,5; 23

Oefening 9-5

- 3; 17,5; 27; 44; 65
- 

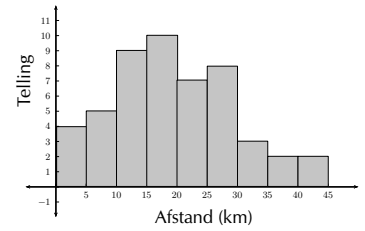
- 1; 12; 28,5; 46,5; 60



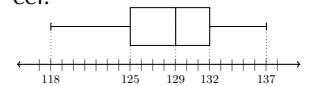
- 3; 5; 7; 13; 16
- (a) 15; 22; 25; 28; 35
(b) 88; 92; 98; 100; 101

Einde van hoofdstuk oefening

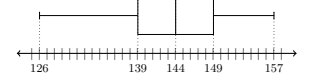
- 44
- 6
- (a) Gemiddelde en Modus
(b) Fiets 1 = 1,02 s en Fiets 2 = 1,0 s
(c) Fiets 2
- (a) 19,9
(b) i. 38%
ii. 14%
iii. 50%



- (c)
- (a) 129; 144
(b) 7; 10
(c) Opgeleide personeel:



Onopgeleide werknemers:



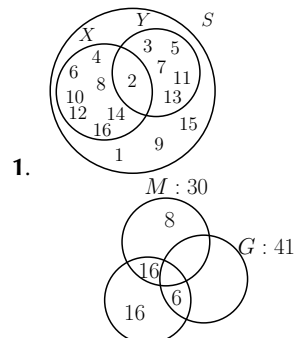
- (a) R 182 222,22
(b) R 100 000
(c) R 100 000

10. Waarskynlikheid

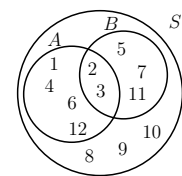
Oefening 10-1

- (a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{5}{6}$
(d) $\frac{1}{3}$
- (a) $\frac{1}{52}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{13}$
(d) $\frac{1}{13}$
(e) $\frac{3}{13}$
- $\frac{1}{5}$

Oefening 10-2



- (a) $H : 36$
(b) 6
(c) 29
(d) 2
- (a) {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}
(b) {1; 2; 3; 4; 6; 12}
(c) {2; 3; 5; 7; 11}



- (d)
- (e) i. 12
ii. 6
iii. 5

Oefening 10-3

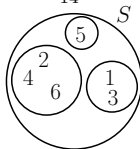
- (a) 0,21
(b) 0,64
(c) 0
(d) 0,72
- (a) 0,5
(b) 0,23
(c) 0,67
(d) 0

- (e) 0,67
(f) 0,67
3. (a) 0,11
(b) 0,33
(c) 0,16
(d) 0,01
(e) 0,80
(f) 0,55
(g) 0,16
(h) 0,01

Einde van hoofdstuk oefening

1. 0,18

2. (a) $\frac{1}{6}$
(b) $\frac{3}{14}$



3.

- (a) $\frac{1}{6}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{3}$

4. $\frac{5}{12}$

5. (a) $\frac{19}{30}$
(b) $\frac{11}{30}$

6. (a) $\frac{4}{9}$
(b) $\frac{5}{9}$

(c) $\frac{1}{9}$

(d) $\frac{8}{9}$

(e) $\frac{5}{9}$

(f) $\frac{4}{9}$

7. (a) $\frac{11}{21}$

(b) $\frac{11}{14}$

8. (a) $\frac{3}{56}$

(b) $\frac{53}{56}$

9. (a) 103

(b) i. $\frac{19}{30}$

ii. $\frac{58}{103}$

(c) $\frac{14}{19}$

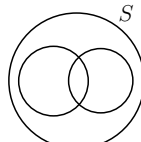
10. (a) i. $\frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{5}$

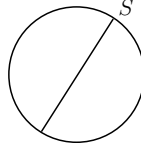
iii. $\frac{1}{7}$

(b) 10

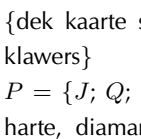
(c) 4



11. (a)



(b)

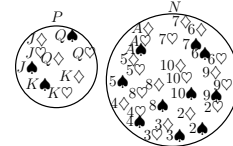


13. (a) {dek kaarte sonder klawers}

(b) $P = \{J; Q; K \text{ van harte, diamante en}$

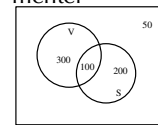
klawers}

(c) $N = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \text{ van harte, diamante en klawers}\}$



(d)

(e) Wedersyds uitsluitend en complement



14. (a)

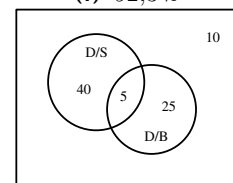
(b) (i) 30,8%

(ii) 46,2%

(iii) 7,7

(iv) 15,4%

(v) 92,3%



15. (a) 50%

(b) 31,25%

(c) 6,25%

11. Euklidiese meetkunde

Oefening 11-1

1. $a = 138^\circ; b = 42^\circ; c = 138^\circ; d = 138^\circ; e = 42^\circ; f = 138^\circ; g = 42^\circ$
2. $\hat{B}_1 = 110^\circ; \hat{C}_1 = 80^\circ; \hat{C}_2 = 30^\circ; \hat{C}_3 = 70^\circ; \hat{D}_1 = 100^\circ; \hat{F}_1 = 70^\circ; \hat{F}_2 = 30^\circ; \hat{F}_3 = 80^\circ; \hat{G}_1 = 70^\circ; \hat{G}_2 = 30^\circ; \hat{G}_3 = 80^\circ$
3. 70°

Oefening 11-2

1. (a) $x = y = 72^\circ$
(b) $x = 98^\circ$
(c) $x = 44^\circ; y = 112^\circ$
(d) $x = 19$ eenhede
(e) $x = 25$ eenhede
(f) $x = 18$ eenhede;
 $y = 4$ eenhede
(g) $x = 12$ eenhede;
 $y = 13$ eenhede

Oefening 11-6

1. (a) $x = 14$ eenhede
(b) $x = 3,5$ eenhede
(c) $x = 5$ eenhede
(d) $x = 28$ eenhede;
 $y = 80^\circ$
(e) $x = 24^\circ; y = 12$ eenhede

Einde van hoofstuk oefening

1. (a) Gestrekte hoek
(b) Stomphoek
(c) Skerphoek
(d) Regte hoek
(e) Inspringende hoek
(f) Stomphoek
(g) Regte hoek
(h) Inspringende hoek
2. (a) V
(b) W
(c) W
- (d) V
(e) W
(f) W
(g) W
(h) V
(i) V
3. (a) $x = 25^\circ$
(b) $x = 145^\circ$
(c) $x = 10$ eenhede;
 $y = 12,5$ eenhede
(d) $x = 60^\circ$
(e) $x = 36^\circ$
(f) $x = 6$ eenhede; $y = 10$ eenhede
5. (a) $a = 107^\circ$; $b = 73^\circ$;
 $c = 107^\circ$; $d = 73^\circ$
(b) $a = 80^\circ$; $b = 80^\circ$;
 $c = 80^\circ$; $d = 80^\circ$
(c) $a = 50^\circ$; $b = 45^\circ$;
 $c = 95^\circ$; $d = 85^\circ$
7. (a) $x = 4,24$ cm
(b) $x = 12$ cm
(c) $x = 7,28$ cm
(d) $x = 40$ mm
9. $x = 2,75$ eenhede; $y = 30^\circ$
10. $a = 5$ eenhede; $b = 12$ eenhede

12. Meting



Oefening 12-1

1. 25 cm²
2. 50 cm²
3. 79 cm²
4. 40 cm²
5. 128 cm²
6. 17,5 cm²
7. 60 cm
8. 525 cm²

Oefening 12-2

1. (a) 344 cm²
(b) 471 cm²
(c) 533 cm²
2. (a) 24 ℓ
(b) 22 ℓ

Oefening 12-3

1. 420 cm³
2. 500 cm³
3. 785,4 cm³

Oefening 12-4

1. (a) 282,7 cm²
(b) 45,6 cm²
(c) 180 cm²
(d) 1 256,6 cm²
2. (a) 108,33 cm³
(b) 270 cm³
(c) 144 cm³
(d) 4 188,8 cm³
3. 175 cm³; 190 cm²

Oefening 12-5

1. Volume verdubbel
3. 31 552 cm³; 96 112 cm²

Einde van hoofstuk oefening

1. (a) Silinder= 352 cm²
 D_h prisma= 384 cm²
 V_h prisma= 72 cm³
(b) Silinder= 502 cm³

- D_h prisma = 240 cm³
 V_h prisma= 40 cm³
- (c) Sil= 3166,7 cm²
 D_h prisma = 3 456 cm²
 V_h prisma= 684 cm²
- (d) Sil= 13571,9 cm³
 D_h prisma = 6 480 cm³
 V_h prisma = 1 080 cm³
2. (a) Keël = 225 cm²
R piramide= 585 cm²
Halwe sfeer= 100 cm²
(b) Keël = 94 cm³
R piramide= 900 cm³
Halwe sfeer= 134 cm³
3. Volume= 335 103,2 cm³
Area= 35 185,9 cm³

WEERGAWE 1

GRAAD 10 WISKUNDE

GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

Hierdie Siyavula **Everything Maths** handboek sal jou alles leer wat jy nodig het om Wiskunde suksesvol te slaag. Dié boek sal jou help om jou wiskundevaardighede te verskerp en jou ondersteun wanneer jy vir die eindeksamens voorberei. Hoe?

MET BEHULP VAN:

- 'n Maklik bekombare formaat.
Stap-vir-stap riglyne wat jou sal help om formules en konsepte te verstaan.
Verduidelikings van die definisies wat in die Suid-Afrikaanse kurrikulum voorkom.
- 'n Wye verskeidenheid *uitgewerkte voorbeelde* wat jou sal help om jou vaardighede te oefen en goeie denkpatrone te ontwikkel.
- Selfoon- en rekenaarondersteuning by www.everythingmaths.co.za
- Die vermoë om die handboek *af te laai en op jou selfoon, iPad of rekenaar te lees*.
- *Videos* wat die konsepte in die boek vir jou verhelder.
- *Opsommende voorleggings* vir elke hoofstuk en *interaktiewe simulaties*.
- *Aanlyn-oefeninge* beskikbaar op jou selfoon of rekenaar, *om jou vaardighede te toets en te verbeter*.
- 'n *Vraag-en-antwoord diens* en toegang tot ander leerders se vrae.

Hierdie boek is geskryf deur vrywilligers wat self 'n loopbaan in wiskunde volg of bloot 'n liefde vir die vak het: onderwysers, akademici en mense in die praktyk.

***Nou dat jy weet hoe die boek werk, kom,
betree die wêreld van Everything Maths.***